2.6 Prismas y paralelepípedos

OBJETIVOS

- Calcular el área lateral y el área total de prismas rectos.
- Calcular el volumen de prismas rectos.
- Resolver problemas de volúmenes en los cuales es necesario utilizar las fórmulas de áreas y volúmenes de prismas rectos.

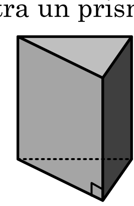
En ésta sección se estudiará como calcular el volumen y el área de los objetos geométricos de tres dimensiones, tales como el cubo y la caja rectangular. El volumen de un sólido es el espacio utilizado por él y se mide en unidades cúbicas; a la superficie que limita al sólido se le llama área superficial y se mide en unidades cuadradas.

Para el estudio de ésta sección se procederá primero a definir las características generales de los sólidos y luego se presentarán las expresiones para calcular el área superficial, el área total y el volumen. La deducción de algunas de las fórmulas que se presentan requiere el uso del cálculo integral, el cual será estudiado en cursos posteriores.

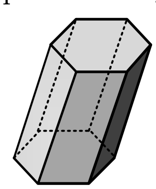
Prismas

Un prisma es un sólido que tiene al menos dos de sus caras iguales y contenidas en planos paralelos, estas caras son llamadas **bases**. Las otras caras de un prisma son llamadas **caras laterales** y tienen la forma de un paralelogramo. Las caras de un prisma se intersecan unas con otras en segmentos llamados **aristas.** Las aristas que unen dos caras laterales se llaman **aristas laterales.**

Un prisma se llama **prisma recto** si las caras laterales son perpendiculares a sus bases. Un prisma se llama **prisma oblicuo** cuando las caras laterales no son perpendiculares a sus bases. A los prismas se les denomina de acuerdo a la forma de sus bases, si por ejemplo si se tiene un prisma cuyas bases son un triángulo y sus caras laterales son perpendiculares a las bases se le llama **prisma triangular recto**. En la figura siguiente se muestra un prisma triangular recto y un prisma hexagonal oblicuo.



Prisma triangular recto



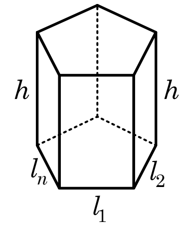
Prisma hexagonal oblicuo

Altura de un prisma

La altura h de un prisma es el segmento que va de una base a otra y es perpendicular a ellas.

Área y volumen de un prisma

El **área lateral, *A.L.*** es la suma de las áreas de las caras laterales y como se muestra en la figura de la derecha éstas caras son paralelogramos de base l_i y altura h, entonces



$$\begin{aligned} A.L. &= l_1h + l_2h + l_3h + \cdots + l_nh \\ &= (l_1 + l_2 + l_3 + \cdots l_n)h \\ &= Ph \end{aligned}$$

Donde P es el perímetro de la base.

El **área total, *A.T.*** de un prisma es la suma de área lateral más las áreas de las dos bases, B. entonces

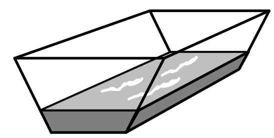
$$\begin{aligned} A.T. &= A.L. + 2B \\ &= Ph + 2B \end{aligned}$$

El **volumen, V** de un prisma es el producto del área de su base B, multiplicada por la altura h, es decir

$$V = Bh$$

Ejemplo 1: El tanque de sección trapezoidal

Un bebedero de agua en un zoológico tiene forma de trapecio isósceles con 2 pies de base, 2 pies de altura y 4 pies de ancho en la parte superior, como se muestra en la figura. El trapecio tiene una longitud de 12 pies y contiene agua con una profundidad de 0.5 pies.

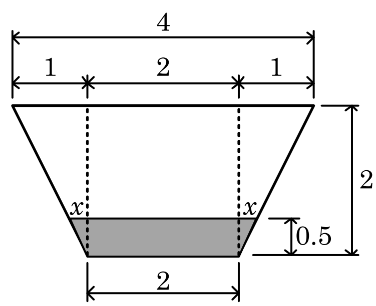


(a) Calcule el volumen de agua en el depósito.

(b) Si el volumen de agua es de 36 pies cúbicos, calcule la altura del agua.

Solución

(a) Al observar el volumen de agua, puede verse que tiene la forma de un prisma recto con bases en forma de trapecio y altura de 12 pies. En la figura siguiente se muestra la base trapezoidal y las variables utilizadas para calcular el área de la región sombreada.



El área B de la región sombreada tiene la forma de un trapacio

$$B = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde $b_1 = 2$, $h = 0.5$ y la base mayor es $b_2 = 2 + 2x$. Para calcular x es necesario utilizar semejanza de triángulos

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{0.5}{2} \\ x &= 0.25 \end{aligned}$$

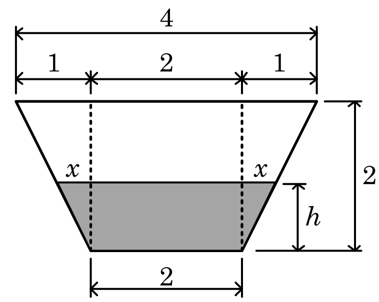
Entonces el área sombreada es

$$B = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2(0.25))(0.5) = 1.125 \text{ pies}^2$$

El volumen del agua es

$$V = Bl = (1.125)(12) = 13.5 \text{ pies}^3$$

(b) Ahora se conoce el volumen, pero no se conoce la altura h del agua. La figura siguiente muestra la nueva situación



El área sombreada es

$$B = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Donde $b_1 = 2$ y la base mayor es $b_2 = 2 + 2x$. Ahora se usa la semejanza de triángulos para expresar x en términos de h ya que queremos encontrar la altura.

$$\frac{x}{1} = \frac{h}{2}$$

$$x = \frac{h}{2}$$

Ahora b_2 se puede expresar en términos de h

$$b_2 = 2 + 2x = 2 + 2\left(\frac{h}{2}\right) = 2 + h$$

Entonces el área de la región sombreada es

$$B = \frac{1}{2}(2 + 2 + h)(h) = \frac{1}{2}h(4 + h)$$

El volumen del agua es

$$V = Bl = \frac{h}{2}(4 + h)(12) = 36 \text{ pies}^3$$

Despejando h en la ecuación anterior

$$24h + 6h^2 - 36 = 0$$

$$h^2 + 4h - 6 = 0$$

Resolviendo por fórmula cuadrática

$$h = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

Como h debe ser positiva, se tiene que la altura del agua es

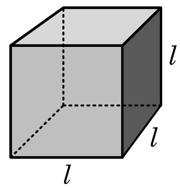
$$h = -2 + \sqrt{10} \approx 1.16 \text{ pies.}$$

El cubo y la caja rectangular

Dos de los prismas rectos más utilizados en Geometría son el cubo y la caja rectangular o paralelepípedo. En ésta sección se presentan las fórmulas para calcular sus áreas y sus volúmenes.

El cubo

El cubo es un prisma recto en el cual sus bases son cuadrados de lado l y altura h también es igual a l. Por tanto, sus caras laterales también son cuadrados de lado l. La figura muestra la forma de un cubo.



Como el cubo tiene 6 caras iguales, de área l^2, el área total del cubo es

$$A = 6l^2$$

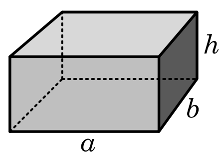
El volumen del cubo es el área de la base multiplicado por la altura

$$V = (l^2)h = (l^2)l$$

$$V = l^3$$

La caja rectangular o paralelepípedo

La caja rectangular es un prisma recto que tiene como bases dos rectángulos de ancho a y de largo b. Si la altura de la caja rectangular es h, las caras laterales son 4 rectángulos dos de base a y altura h y dos de base b y altura h. La figura siguiente muestra una caja rectangular



El área lateral de la caja rectangular se encuentra sumando las áreas de las cuatro caras, es decir

$$A.L. = 2(ah) + 2(bh)$$

El área total se encuentra sumando las áreas de las bases al área lateral

$$A.T. = 2ah + 2bh + 2ab$$

El volumen es el área de la base multiplicada por la altura

$$V = (ab)h$$

Ejemplo 2: Volumen de un cubo

Encontrar el área y el volumen de un cubo cuya diagonal mayor mide $6\sqrt{3}$ cm

Solución

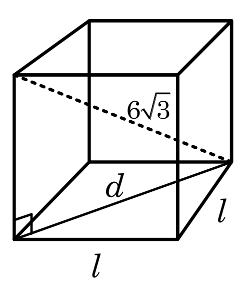
La figura muestra un cubo de lado l, su diagonal principal y una de las diagonales en la base del cubo.

La longitud de la diagonal d en la base es

$$d = \sqrt{l^2 + l^2}$$

$$= \sqrt{2l^2}$$

$$= \sqrt{2}\, l$$



Usando nuevamente el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal principal

$$l^2 + d^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2$$

$$l^2 + \left(\sqrt{2}\, l\right)^2 = 36(3)$$

$$l^2 + 2l^2 = 108$$

$$3l^2 = 108$$

$$l = \sqrt{\frac{108}{3}} = \sqrt{36} = 6$$

Ahora ya se puede calcular el área y el volumen del cubo

$$A = 6l^2 = 6(6)^2 = 216\,\text{cm}^2$$

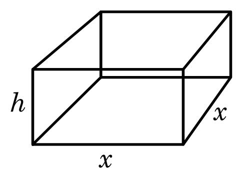
$$V = l^3 = (6)^3 = 216\,\text{cm}^3$$

Ejemplo 3: Dimensiones de una caja rectangular

Se quiere construir una caja rectangular abierta de base cuadrada y una altura de 6 cm. La caja será construida de un material para la base que cuesta Q3 el centímetro cuadrado y el material para los lados tiene un costo de Q2 el centímetro cuadrado. Determine las dimensiones de la caja si se dispone de Q576 para su construcción.

Solución

Sea x la longitud de la base, como se muestra en la figura siguiente



El costo de los materiales depende del área superficial de la caja. El área de la base es

$$AB = x^2$$

Note que solo se toma una de las bases pues la caja es abierta. El costo de la base se encuentre multiplicando el costo unitario Q3 por el área

$$C.B. = 3\left(x^2\right)$$

Como las cuatro caras laterales son iguales, el área lateral es

$$A.L. = 4(xh) = 4x(6) = 24x$$

El costo de los lados se encuentra multiplicando Q2 por el área lateral.

$$C.L. = 2(24x) = 48x$$

El costo total se encuentre sumando el costo de la base más el costo de los lados

Costo total = Costo de la base + Costo de los lados

$$C.T. = 3x^2 + 48x$$

$$576 = 3x^2 + 48x$$

Resolviendo la ecuación para x

$$3x^2 + 48x - 576 = 0$$

$$x^2 + 16x - 192 = 0$$

$$(x + 24)(x - 8) = 0$$

De donde se obtiene que $x = 8$ y $x = -24$.

Como x no puede ser negativa, se concluye que las dimensiones de la caja rectangular son de 8 cm por lado en la base y 6 cm de altura.

Ejercicios de la sección 2.6

1. Encuentre el área total y el volumen de un cubo si la diagonal de una de sus caras mide 6 cm.

2. Encuentre el volumen de un cubo si la longitud de su diagonal mayor mide 8 cm.

3. Si el área total de un cubo mide 108 cm^2, calcule su volumen.

4. Si el volumen de un cubo mide 125 cm^3, calcule el área total.

5. Para determinar el volumen de un sólido irregular, este es sumergido en un depósito en forma de paralelepípedo rectangular de base cuadrada de 10 cm por lado. Si la altura del agua en el depósito aumenta 1.2 cm al introducir el sólido, calcule su volumen.

6. La base de un prisma recto es un triángulo equilátero de lado 6 cm. Encontrar el volumen y el área total si la altura es de 10 cm.

7. La base de un prisma recto es un rombo con diagonales de 6 cm y 8 cm. Encontrar el volumen del sólido y el área lateral si la altura es de 10 cm.

8. La base de un prisma recto de altura 4 pies, es un hexágono regular. Si el área lateral del prisma es 144 $pies^2$. Encontrar el volumen del prisma.

9. ¿Cuántos ladrillos de 20 por 10 por 5 cm se necesitan para construir una pared de 6 m por 2 m por 10 cm, considerando que el 12% de la pared es utilizado por la mezcla que va entre los ladrillos?

10. Dos de las dimensiones de un prisma rectangular recto son de 6 y 8 pulgadas. Si la diagonal del prisma mide 12 pulgadas. Encontrar la tercera dimensión.

11. Un recipiente rectangular recto tiene una base de 12 cm por 8 cm. Se llena con agua hasta una profundidad de 5 cm y se observa que al sumergir completamente un cubo sólido el nivel del agua sube a 5.5 cm. Encontrar la arista del cubo.

12. La altura de un prisma hexagonal recto mide el doble del lado de la base. Si el volumen del prisma es de $192\sqrt{3}$ cm^3, Encuentre el área lateral del prisma.

13. Un prisma rectangular recto de área total 236 cm^2 tiene altura de 6 cm. Si el ancho de la base es menor en 2 cm que su longitud. Encuentre su volumen.

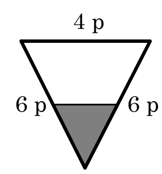
14. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 $pies^3$. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



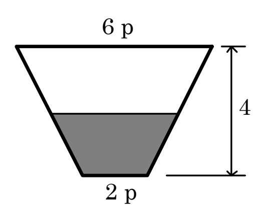
15. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal es el trapecio isósceles que se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 $pies^3$. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



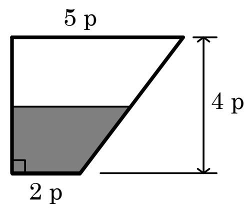
16. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

(b) Si la altura del agua es de 2 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 60 pies^3. Calcule la altura del agua.

(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



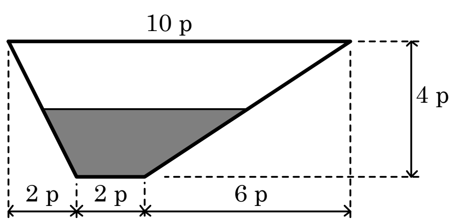
17. Un depósito tiene una longitud de 10 pies y su sección transversal se muestra en la figura

(a) Calcule la capacidad total del depósito.

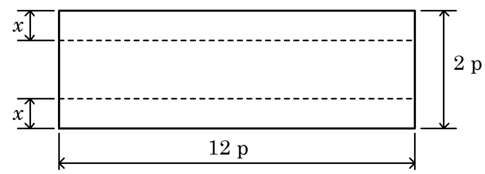
(b) Si la altura del agua es de 3 pies, calcule el volumen de agua en el depósito.

(c) Si el volumen de agua en el depósito es de 100 pies^3. Calcule la altura del agua.

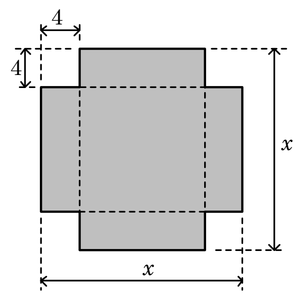
(d) Calcule el área del espejo de agua en la superficie si la altura es de 2 pies.



18. A partir de una lámina rectangular de 12 pies de largo y 2 pies de ancho se va a construir un canal rectangular, doblando hacia arriba la lámina en la línea que se muestra discontinua en la figura. Determine x de tal forma que la capacidad del canal sea de 4.5 pies^3.



19. De un cartón cuadrado se va a construir una caja rectangular de base cuadrada y altura 4 cm. Para hacerlo se cortarán cuadrados de 4 cm por lado en cada una de las esquinas del cartón como se muestra en la figura. Determine el valor de x de tal forma que el volumen de la caja sea de 324 cm^3.



20. Para que una maleta de equipaje en los vuelos de avión sea adecuada, debe tener la forma de una caja rectangular de manera que el largo de la base sea el doble del ancho y la suma del perímetro de la base con la altura debe ser de 82 pulgadas. Determine las dimensiones de la maleta si el área superficial total es de 1836 pulgadas cuadradas.