UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CLAVE-101-2-M-2-00-2019

CURSO: Matemática Básica 1

SEMESTRE: Segundo

CÓDIGO DEL CURSO: 101

TIPO DE EXAMEN: Segundo examen parcial

RESOLVIÓ EL EXAMEN: Marco Gómez

DIGITALIZÓ EL EXAMEN: Marco Gómez

COORDINADOR: Ing. José Alfredo González Díaz

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMARIO STP

Tema 1 (20 puntos)

Dada $h(x) = x^2 + 5x + 6$. Determine:

a. El dominio y rango de la función.
b. La inversa de h(x), indicando las restricciones que haya efectuado, su dominio y su rango.
c. Grafique en el mismo plano cartesiano h(x) y la inversa.
d. Calcule $(h^{-1} \circ h)(x)$

Tema 2 (15 puntos)

Dadas las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 = 4$
b) Centro en (2,0) y radio 2.

Determine las ecuaciones de las dos rectas que pasan simultáneamente por el origen y por los puntos de intersección de las circunferencias indicadas.

Tema 3 (25 puntos)

Dado el polinomio:

$$G(x) = x^6 + 5x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 18x^2$$

a) Aplicando la regla de los signos de Descartes, indique mediante una tabla las posibles combinaciones de total de raíces, raíces nulas, positivas, negativas y complejas del polinomio.
b) Determine las posibles raíces racionales.
c) Calcule las raíces del polinomio.
d) Haga un bosquejo de la gráfica del polinomio.

Tema 4 (20puntos)

Sea $F(x) = x^2 + x + 1$ y sea *h* una constante diferente de cero. Evalúe:

a) $F(a)$ y $F(a + h)$
b) $F(a + h) - F(a)$
c) $\dfrac{[F(a + h) - F(a)]}{h}$
d) $F \circ F(a + h)$

Tema 5(20puntos)

Un depósito tiene forma de cono circular recto invertido. Su radio en la parte superior es de 30 pies y su altura es de 15 pies. Calcule:

a) La capacidad del depósito.
b) Exprese el volumen contenido en el depósito como una función de la altura, indicando dominio y contradominio.
c) La altura del nivel de agua cuando el volumen contenido es de 96 π pies cúbicos.
d) La medida del "espejo de agua" cuando la altura es de 5 pies.

Tema 1 (20 puntos)

Dada $h(x) = x^2 + 5x + 6$. Determine:

a. El dominio y rango de la función.

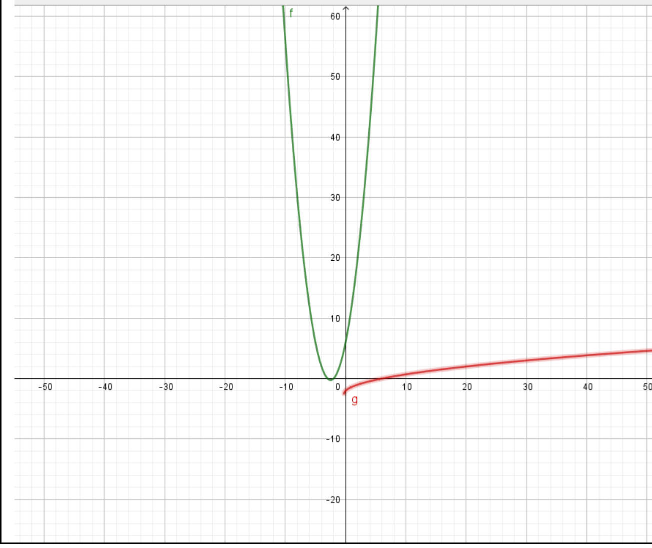
No.	Explicación	Operatoria
1.	El dominio de la función por ser una cuadrática no tendrá restricción y el rango de la misma empezará en su punto mínimo	$\boldsymbol{Dominio}$: $(-\infty, \infty)$ $\boldsymbol{Rango}$: $[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \infty)$

b. La inversa de h(x), indicando las restricciones que haya efectuado, su dominio y su rango.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como primer paso, para manipular de una manera más sencilla la expresión, se completará al cuadrado.	$h(x) = x^2 + 5x + 6 + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}$ $h(x) + \frac{1}{4} = (x + \frac{5}{2})^2$
2.	Se procederá a despejar x de la expresión anterior	$x = (h(x) + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}$
3.	Se sustituirán las variables “x” por “y” y viceversa	$h^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}$
4.	Se restringirá el dominio de la función dado que la función no es uno a uno	$\boldsymbol{Dominio}$: $[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, \infty)$ $\boldsymbol{Rango}$: $[\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{2}}, \infty)$

c. Grafique en el mismo plano cartesiano h(x) y la inversa.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Mediante el uso de un software como lo puede ser Geogebra, se graficaron ambas funciones.	

d. Calcule $(h^{-1} \circ h)(x)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procederá a realizar la composición de la siguiente manera:	$(h^{-1} o\, h)(x) = \sqrt{x^2 + 5x + \frac{25}{4}} - \frac{5}{2} = \boldsymbol{x}$

Tema 2 (15 puntos)
Dadas las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 = 4$
b) Centro en (2,0) y radio 2.

Determine las ecuaciones de las dos rectas que pasan simultáneamente por el origen y por los puntos de intersección de las circunferencias indicadas.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como primer paso, se deberá encontrar un punto sobre la recta que será la intersección entre las dos circunferencias.	$x^2 + y^2 = 4$ $(x-2)^2 + y^2 = 4$
2.	Sabiendo las dos ecuaciones de las dos circunferencias, se multiplicará la ecuación de la circunferencia desplazada por -1 y luego se sumará el resultado con la ecuación de la circunferencia del origen.	$x^2 + y^2 = 4$ $-(x-2)^2 - y^2 = 4$ $Sumando\ las\ expresiones\ anteriores$ $x^2 - (x-2)^2 = 0$ $simplificando:$ $4x - 4 = 0$
3.	El punto de intersección en x será la solución de la última expresión del inciso anterior	$x = 1$
4.	Se procederá a encontrar el/los puntos en "y" mediante cualquiera de las dos ecuaciones de las circunferencias.	$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

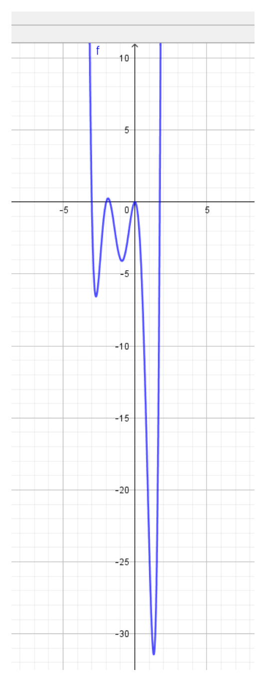
		$y_1 = +\sqrt{3}$ $y_2 = -\sqrt{3}$
5.	Por último, utilizando los puntos anteriores se encontrará la pendiente de las rectas y luego se sustituirá en la ecuación de la recta con punto y pendiente.	$m_1 = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ $m_2 = \frac{-\sqrt{3}-0}{1-0} = -\sqrt{3}$ $\boldsymbol{y_1(x) = \sqrt{3}x}$ $\boldsymbol{y_2(x) = -\sqrt{3}x}$

Tema 3 (25 puntos)
Dado el polinomio:

$$G(x) = x^6 + 5x^5 + 3x^4 - 15x^3 - 18x^2$$

a) Aplicando la regla de los signos de Descartes, indique mediante una tabla las posibles combinaciones de total de raíces, raíces nulas, positivas, negativas y complejas del polinomio.
b) Determine las posibles raíces racionales.
c) Calcule las raíces del polinomio.
d) Haga un bosquejo de la gráfica del polinomio.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se deberá observar la cantidad de cambios de signo que existe en la función, en G(x) y G(-x).	$Para\ G(x)$: $x^2(x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 15x - 18)$ $existe\ un\ único\ cambio\ de\ signo$ $Para\ G(-x)$: $G(-x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18$ $Existe\ tres\ cambios\ de\ signo$
2.	Se realizará una tabla construida mediante el análisis del inciso anterior.	a) **+** | **-** | **Nulas** | **Complejas** | **Total** **1** | **3** | **2** | **0** | **6**
3.	Tomando en cuenta que existe una raíz de multiplicidad 2, con solución $x = 0$ y el polinomio simplificado $G(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 15x - 18$. Para encontrar las posibles raíces restantes de dividirá ± 18 dentro de ± 1, que son el último término de la ecuación simplificada y el primer coeficiente de la misma, respectivamente. Luego se procederá a encontrar múltiplos de dicha división.	b) $\boldsymbol{x = \frac{\pm 18}{\pm 1} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18}$

4.	Aplicando la división sintética utilizando como posibles soluciones los valores de -2 y -3, se podrá confirmar que son soluciones de $G(x)$.	$\begin{array}{r\|rrrrr} & 1 & 5 & 3 & -15 & -18 \\ -2 & & -2 & -6 & 6 & 18 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -9 & 0 \\ -3 & & -3 & 0 & 9 & \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 & \end{array}$
5.	Utilizando el polinomio restante de la división sintética aplicada en el inciso anterior $x^2 - 3 = 0$, se encontrará las últimas dos soluciones.	$x = +\sqrt{3}$ $x = -\sqrt{3}$
6.	Las soluciones del polinomio dado serán:	$\boldsymbol{x_1 = 0}$ $\boldsymbol{x_2 = 0}$ $\boldsymbol{x_3 = -2}$ $\boldsymbol{x_4 = 3}$ $\boldsymbol{x_5 = +\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{x_6 = -\sqrt{3}}$
7.	Se procederá a graficar la función correspondiente	

Tema 4 (20puntos)

Sea $F(x) = x^2 + x + 1$ y sea *h* una constante diferente de cero. Evalúe:

a) $F(a)$ y $F(a + h)$

b) $F(a + h) - F(a)$

c) $\dfrac{[F(a + h) - F(a)]}{h}$

d) $F \circ F(a+h)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	a) Se procederá a calcular $F(a)$ y luego $F(a+h)$	$\boldsymbol{F(a) = a^2 + a + 1}$ $F(a+h) = (a+h)^2 + a + h + 1$ $\boldsymbol{F(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 + a + h + 1}$
2.	b) Se restarán las dos expresiones obtenidas en el inciso anterior.	$F(a+h) - F(a) = a^2 + 2ah + h^2 + a + h + 1 - (a^2 + a + 1)$ $\boldsymbol{F(a+h) - F(a) = h^2 + 2ah + h}$
3.	c) El resultado del inciso anterior se dividirá con h y así obtener la siguiente expresión.	$\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h} = \dfrac{h^2 + 2ah + h}{h}$ $\boldsymbol{\dfrac{F(a+h) - F(a)}{h} = h + 2a + 1}$
4.	d) Dentro de la función $F(x)$ se evaluará la función $F(a+h)$	$\boldsymbol{FoF(a+h) = [(a+h)^2 + a + h + 1]^2 + (a+h)^2 + a + h + 1 + 1}$

Tema 5(20puntos)

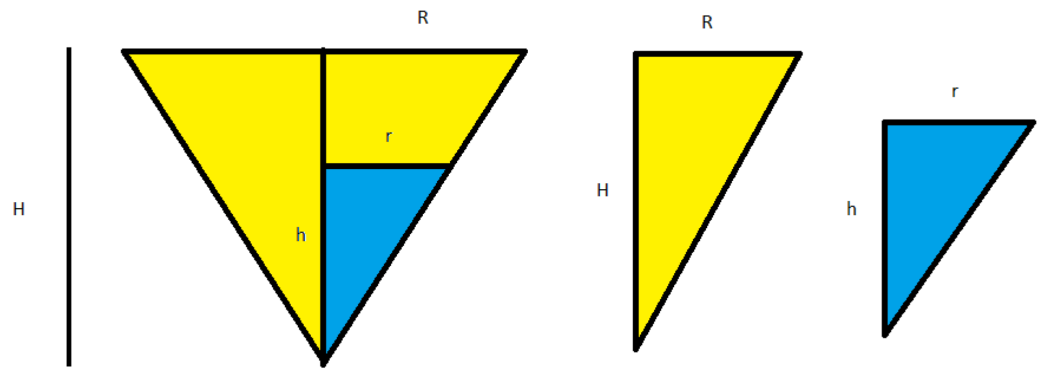
Un depósito tiene forma de cono circular recto invertido. Su radio en la parte superior es de 30 pies y su altura es de 15 pies. Calcule:

a) La capacidad del depósito.

b) Exprese el volumen contenido en el depósito como una función de la altura, indicando dominio y contradominio.

c) La altura del nivel de agua cuando el volumen contenido es de 96 π pies cúbicos.

d) La medida del “espejo de agua” cuando la altura es de 5 pies.



No.	Explicación	Operatoria
1.	a) Dado que proporcionan las dimensiones del tanque y su forma se podrá asumir lo siguiente:	$V=\frac{\pi * r^2 * h}{3}$ $\boldsymbol{V=\frac{\pi * (30)^2 * 15}{3} = 4500\pi ft^3}$
2.	b) Siguiendo el esquema realizado en la figura al inicio de este procedimiento, se llegará a lo siguiente:	$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}$ $r=\frac{Rh}{H}$ $\boldsymbol{V=\frac{4\pi h^3}{3}}$ $\boldsymbol{Dominio}$: $\boldsymbol{[0,15]ft^3}$ $\boldsymbol{Contradominio}$: $\boldsymbol{[0,4500\pi]ft^3}$
3.	c) Se sustituirá el valor del volumen proporcionado en la expresión anterior para encontrar la altura del depósito en dicho valor.	$96\pi=\frac{4\pi h^3}{3}$ $\boldsymbol{h=\sqrt[3]{\frac{96\pi * 3}{4\pi}}=4.16ft}$
4.	d) Dado que el tanque tiene forma cónica, el área del espejo de agua es igual a la de una circunferencia, entonces:	$Encontrando\ el\ radio$: $r=\frac{Rh}{H}=\frac{30 * 5}{15}=2 * 5 = 10ft$ $Encontrando\ el\ área$:

		$A_s = \pi * r^2 = \pi * 10^2 = 100\pi ft^2$