UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-4-V-1-00-2019

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Primer Semestre**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**28 de Mayo de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Lucía Gabriela Ardón Sazo**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Lucía Gabriela Ardón Sazo**
COORDINADO POR:	**Ing. José Alfredo González**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

28 de Mayo de 2019 **Examen Final** **Temario A**

Tema 1: (20 puntos)

Determine la ecuación estándar de la hipérbola con centro en el punto **C(1,-1)** y que pasa por el punto **P(6,3);** se sabe que la pendiente de una de sus asíntotas es **m=1**. Además, determine las coordenadas de los focos, las ecuaciones de las asíntotas y grafique.

Tema 2: (20 puntos)

Dada la función: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{2x^3-x^2-2x+1}}{\boldsymbol{x^3-3x^2+2x}}$. Determine las coordenadas del agujero si tuviera. Determine la ecuación de la asíntota horizontal. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales. Grafique la función e indique claramente los interceptos con los ejes.

Tema 3: (15puntos.)

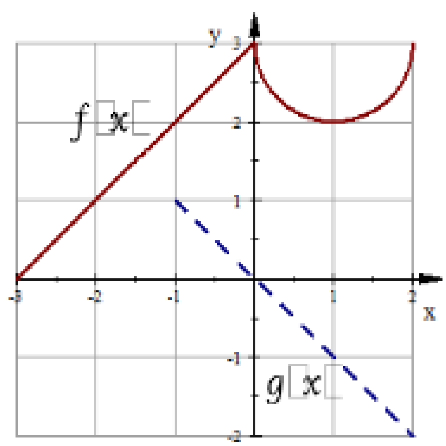
Resuelva la ecuación para el intervalo $\boldsymbol{0°} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{360°}$

$$\boldsymbol{3\cos x sin^2 x - 5\cos x \sin x + 2\cos x = 0}$$

Tema 4: (25 puntos)

La figura adjunta muestra las gráficas de las funciones **F(x) y G(x).**

a) Obtenga el valor de $\boldsymbol{GoFoG}(\boldsymbol{2})$.
b) Dibuje la gráfica de **y=-F(x-1)+2**.
c) Use la fórmula para la función definida por partes **F(x).**



Tema 5: (20 puntos)

Uno de los lados horizontales de un paralelogramo mide 5 metros y los inclinados 8 metros, mientras que la diagonal menor mide 7 metros. Entonces,

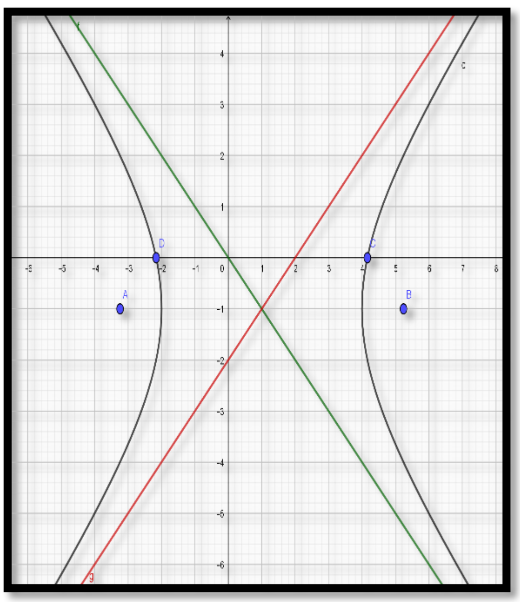
a) Utilizando ley de cosenos calcule el ángulo agudo del paralelogramo.
b) Utilizando ley de senos calcule el ángulo entre la diagonal menor y el lado de 8 metros.
c) Determine el área del paralelogramo.

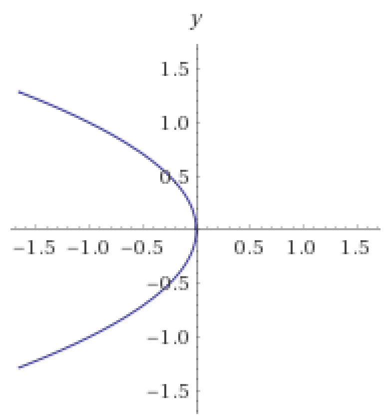
SOLUCIÓN DEL EXAMEN

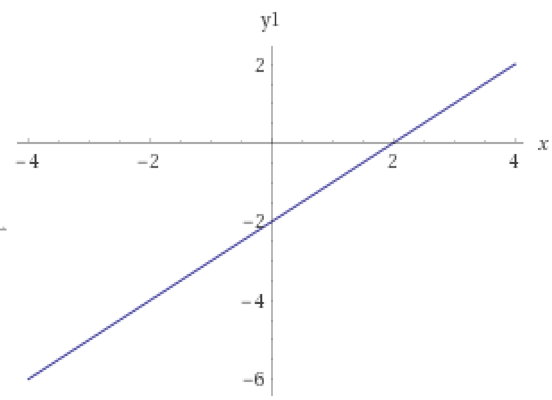
Tema 1: 20 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se sabe que la ecuación de la hipérbola horizontal tiene la forma:	$1=\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$
2.	Si las coordenadas del centro son:	$h=1\ \&\ k=-1$
3.	Entonces,	$1=\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y+1)^2}{b^2}$
4.	Como se conoce la pendiente de una de las asíntotas se plantea la siguiente ecuación:	$m_1=\frac{a}{b}$
5.	De lo anterior se tiene que:	$\mathrm{a}=b$
6.	Sustituyendo la condición anterior en la ecuación general para la hipérbola:	$1=\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y+1)^2}{a^2}$
7.	Reemplazando el punto en la ecuación, se tiene:	$\mathrm{a}^2=(6-1)^2-(3+1)^2$
8.	El valor de a y b por lo tanto corresponde a:	$\mathrm{a}=\pm 3$
9.	Con lo cual se completa la ecuación de la hipérbola	$1=\frac{(\mathrm{x}-1)^2}{9}-\frac{(\mathrm{y}+1)^2}{9}$
10.	Para determinar el foco se plantea:	$\mathrm{c}^2=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$
11.	Se desarrolla la expresión:	$\mathrm{c}^2=2\mathrm{a}^2$
12.	Luego, se despeja y se determina los valores para c:	$\mathrm{c}=\pm 3\sqrt{2}$
13.	Por lo tanto, las coordenadas de los focos son:	$\mathrm{C}_1\left(-3\sqrt{2}+1,-1\right)\ \&\ \mathrm{C}_2\left(3\sqrt{2}+1,-1\right)$
14.	Las asíntotas son dos rectas perpendiculares, por lo tanto se cumple que:	$m_2=-\frac{1}{m_1}=-1$

15.	Como el punto de ambas asíntotas es común con el centro de la hipérbola se tiene:	$m_2(x-1) = y+1$ $m_1(x-1) = y+1$
16.	Las ecuaciones de las asíntotas son:	$y_2 = -x$ $y_1 = x-2$
17.	Finalmente la gráfica se muestra a continuación:	



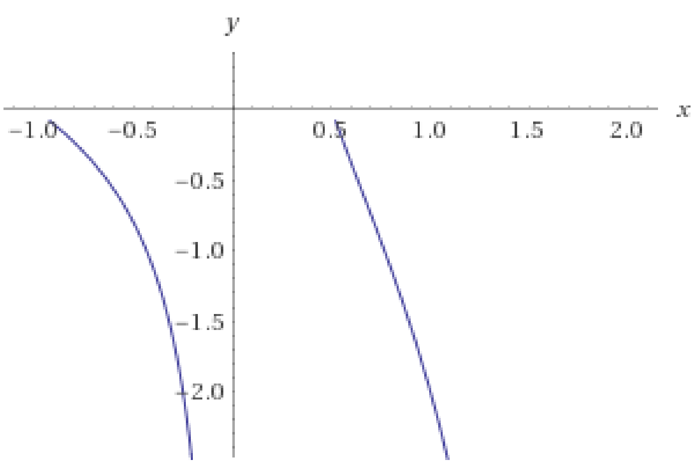


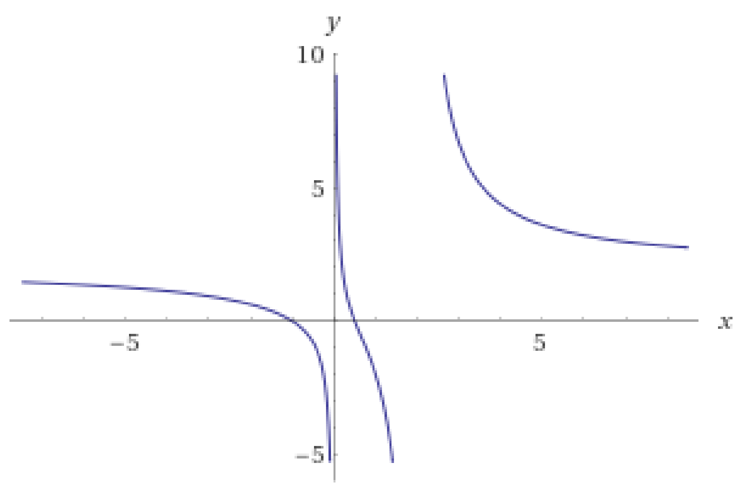


Tema 2: 20 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se factoriza la función por agrupación de términos en el numerador y en el denominador:	$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}^2(2\mathrm{x}-1)-(2\mathrm{x}-1)}{\mathrm{x}(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2)}$ $= \frac{(2\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1)}$
2.	Se puede concluir que existen dos asíntotas verticales cuyas ecuaciones son:	$\mathrm{x}_1 = 2 \;\&\; \mathrm{x}_2 = 0$
3.	Además, analizando la función se puede ver que existe una asíntota horizontal cuyo valor está dado por la razón entre los	$\mathrm{f(x)} = \frac{2\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}^3}$

	coeficientes numéricos de la variable independiente con su mayor grado, como sigue:	
4.	Evaluando para x=1 en la expresión anterior, se tiene que:	$y_1 = 2$
5.	Finalmente se puede apreciar que existe un agujero para la función en x=1 porque el término (x-1) está presenta tanto en el numerador como el denominador.	$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-2)}$
6.	Evaluando para x=1 en la expresión anterior, se tiene que:	$f(1) = -2$
7.	Las coordenadas del agujero son:	$(1, -2)$
8.	La función no tiene interceptos en el eje y. No obstante, para el eje x los interceptos son como sigue:	$0 = (2x-1)(x+1)$ $0 = 2x - 1 \;\; \& \;\; 0 = x + 1$ $x = \frac{1}{2} \;\; \& \;\; x = -1$
9.	Finalmente la grafica queda de la siguiente manera:	





Tema 3: 15 puntos

No.	Explicación	Operatoria
1.	Factorizando la ecuación se tiene lo siguiente:	$\cos x\,(3sin^2x - 5\sin x + 2) = 0$ $\cos x = 0 \;\; \& \;\; 3sin^2x - 5\sin x + 2 = 0$
2.	La primera solución para "x" se obtiene de la función coseno, despejando con una función trigonométrica inversa.	$x_{1,2} = \cos^{-1} 0 = \{90°, 270°\}$
3.	Las otras soluciones se obtienen realizando una sustitución como sigue:	$\sin x = u$ $3u^2 - 5u + 2 = 0$ $(3u - 3)(3u - 2) = 0$ $u = 1 \quad y \quad u = \frac{2}{3}$
4.	Entonces,	$x_{3,4} = \sin^{-1} 1 = \{90°, 270°\}$ $x_{5,6} = \sin^{-1}\frac{2}{3} = \{41.81°, 138.19°\}$
5.	La solución para la ecuación en el intervalo solicitado es:	$x = \{90°, 270°, 41.81°\}$

R./

$$\mathbf{x_{1,2,3} = \{90°, 270°, 41.81°\}}$$

Tema 4: 25 puntos

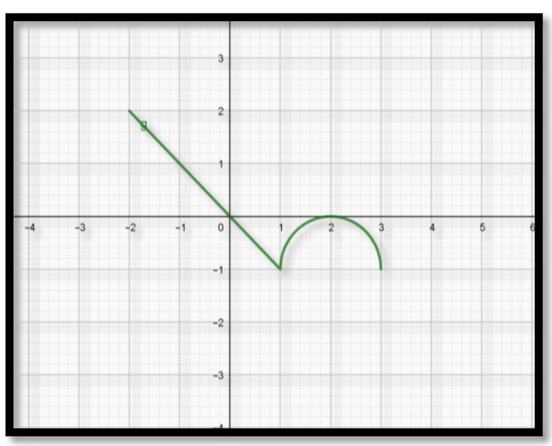
a) Obtenga el valor de $\boldsymbol{GoFoG(2)}$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Cuando x=2 entonces F(x)= -x y -$G(x) = 3-\sqrt{(x-1)^2-1}$,	$GoF(x) = 3-\sqrt{(x+1)^2-1}$
2.	Finalmente se determina lo siguiente:	$GoFoG(x)$ $= 3-\sqrt{(3-\sqrt{(x+1)^2-1}+1)^2-1}$
3.	Evaluando se tiene:	$GoFoG(2)$ $= 3-\sqrt{(3-\sqrt{(2+1)^2-1}+1)^2-1}$

R./

$$\boldsymbol{GoFoG(2) = 2.59}$$

b) Dibuje la gráfica de y=-F(x-1)+2.



a) Use la fórmula para la función definida por partes f(x).

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1	Se determina función:	$F(x) = x - 3 \quad si -3 \leq x \leq 0$ $3 - \sqrt{1-(x-1)^2} \; si \quad 0 \leq x \leq 2$

Tema 5: 20 puntos

Uno de los lados horizontales de un paralelogramo mide 5 metros y los inclinados 8 metros, mientras que la diagonal menor mide 7 metros. Entonces,

a) Utilizando ley de cosenos calcule el ángulo agudo del paralelogramo.
b) Utilizando ley de senos calcule el ángulo entre la diagonal menor y el lado de 8 metros.
c) Determine el área del paralelogramo.

a) Utilizando ley de cosenos calcule el ángulo agudo del paralelogramo.

No.	Explicación	Operación
1	Se plantea la ley de cosenos como sigue: Donde: c es el lado inclinado, a es la diagonal menor y b es la base del paralelogramo. $\boldsymbol{\alpha} = \text{angulo buscado.}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$
2	Despejando el ángulo nos queda:	$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$
3	Evaluando nos queda:	$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{49+25-64}{2(7)(5)}\right) = 81.78°$

R//

El ángulo agudo es de 81.78°

b) Utilizando ley de senos calcule el ángulo entre la diagonal menor y el lado de 8 metros.

No.	Explicación	Operación
1	Se plantea la ley de senos como sigue:	$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$
2	Despejando la función se tiene:	$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\sin\alpha\right)$
3	Reemplazando el valor se concluye que:	$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\sin 81.78\right)$= 5.86°

El valor del ángulo es de 5.86°

c) Determine el área del paralelogramo.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1	El área del paralelogramo se plantea como sigue	$A = ab\sin\alpha$
2	Entonces	$A = (7)(5)\sin 81.78$

R// El área que encierra el paralelogramo es de 34.63 u^2