UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-5-M-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Primera Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**10 de Enero de 2020**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Jackeline Lissette Tavico Pérez**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Jackeline Lissette Tavico Pérez**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo Gonzales Díaz**

EXAMEN DE PRIMERA RETRASADA
TEMARIO FM

Tema 1 (20 puntos)

Una hipérbola horizontal tiene su centro en el punto $C = (-2,3)$, con semieje mayor, $a = 3$; además, la curva pasa por el punto (3,5), resuelva lo siguiente:

a) Determine la ecuación de la hipérbola.
b) Indique la posición de los vértices y focos.
c) Determine las ecuaciones de las asíntotas.
d) Grafique la hipérbola, las asíntotas, los vértices, los focos y el centro.

Tema 2 (20 puntos)

Dos barcos parten del mismo puerto, el barco A parte en dirección N 30° E; mientras que el barco B parte en dirección N 40° O. Cuando el barco B se encuentra a 80 kilómetros del puerto de partida y el barco A se encuentra a 50 kilómetros, éste último reporta que tiene problemas y debe evacuar la embarcación. Si el barco B irá en apoyo del barco A, ¿qué distancia debe recorrer desde su posición actual hasta la posición del barco A? ¿En qué dirección debe navegar?

Tema 3 (40 puntos)

Resuelva las ecuaciones en (a), (b) y (c); demuestre la identidad en (d).

a) $4\log_3\left(\frac{1}{x^4}\right) + 3\log_9 x^4 - \log_{27} x^3 = 11$

b) $3^{3x+1} - 28(3^{2x}) + 3^{x+2} = 0$

c) $3 - 3\cos^2 x + \sin x = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 2\pi$

d) $\frac{\tan x}{1+\sec x} + \frac{1+\sec x}{\tan x} = 2\csc x$

Tema 4 (20 puntos)

Si cada uno de dos lados opuestos de un cuadrado se incrementa 5 pulgadas más que el doble del lado del cuadrado, y cada uno de los otros lados opuestos se disminuye en 7 pulgadas, el área del rectángulo resultante supera en 55 pulgadas cuadradas al área del cuadrado inicial. Halle la longitud del lado del cuadrado.

SOLUCIÓN

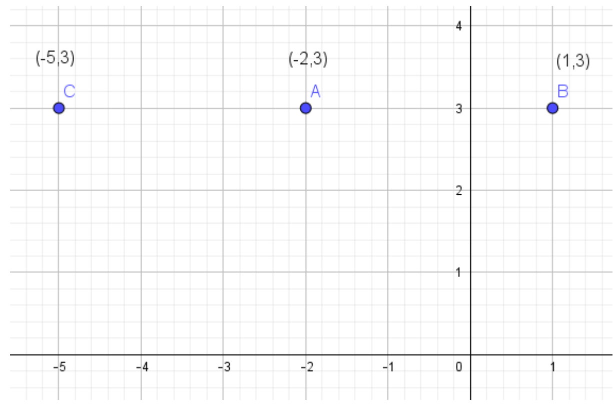
Tema 1 (20 puntos)

Una hipérbola horizontal tiene su centro en el punto $C = (-2{,}3)$, con semieje mayor, $a = 3$; además, la curva pasa por el punto (3,5), resuelva lo siguiente:

a) Determine la ecuación de la hipérbola.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Sabemos que la ecuación general de una hipérbola horizontal es la siguiente.	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$
2.	El problema nos proporciona su centro, el valor de a, y un punto por donde pasa la curva.	C = (h,k) = (-2,3) a = 3 punto = (x,y) = (3,5)
3.	Por lo tanto sustituimos los datos en la ecuación general de una hipérbola horizontal.	$\frac{(3-(-2))^2}{3^2} - \frac{(5-3)^2}{b^2} = 1$
4.	Operamos la expresión para despejar b^2	$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$ $-\frac{4}{b^2} = -\frac{16}{9}$ $-4 = \frac{16}{9} * b^2$ $\frac{9}{4} = b^2$
5.	Sustituimos en la ecuación de la hipérbola, el punto, a^2 y b^2, Para obtener la ecuación de forma estándar.	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$
6.	Operamos la expresión para obtener la ecuación de forma general	$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad * (9)(\frac{9}{4})$ $\frac{9}{4}x^2 + 9x + 9 - 9y^2 + 54y - 81 = \frac{81}{4}$ $\frac{9}{4}x^2 - 9y^2 + 9x + 54y = \frac{369}{4}$
	RESPUESTA : La ecuación se puede expresar de dos formas. (General y Estándar)	• $\frac{9}{4}x^2 - 9y^2 + 9x + 54y = \frac{369}{4}$ • $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

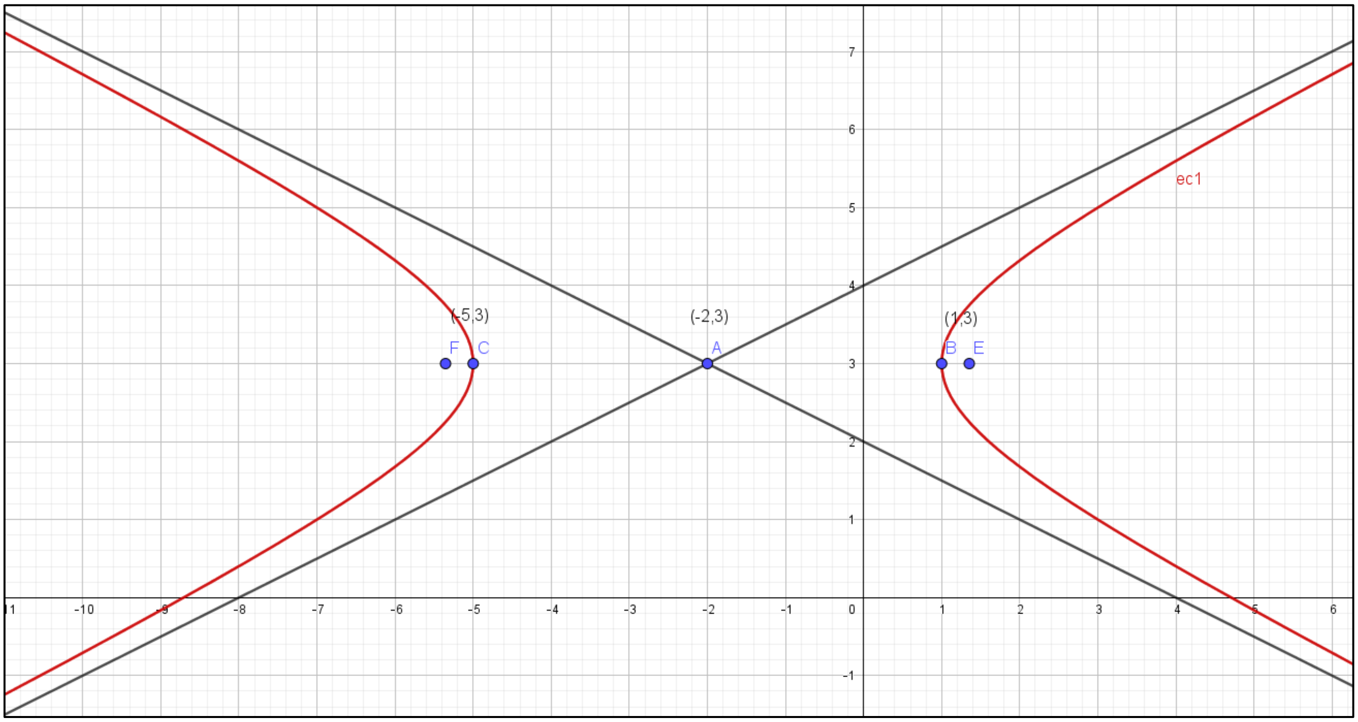
b) Indique la posición de los vértices y focos.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Dado que conocemos su centro y a, y es una hipérbola horizontal, graficamos el centro y movemos 3 unidades a la izquierda y 3 unidades a la derecha, encontrando sus vértices.	 Vértices = (-5,3) , (1,3)
2.	Los focos de una hipérbola se expresan de la siguiente manera	Focos = (h $\pm$c, k)
3.	Dado que conocemos a^2 y b^2 , encontramos c^2	$c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = 9 + \frac{9}{4}$ $c^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$
4.	Sustituimos valores y encontramos los focos	Focos = (h $\pm$c, k) Focos = (-2 $\pm$ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, 3) Focos = ($\frac{-4+3\sqrt{5}}{2}$, 3) y ($\frac{-4+3\sqrt{5}}{2}$, 3)
	RESPUESTA:	Vértices = (-5,3) , (1,3) Focos = ($\frac{-4+3\sqrt{5}}{2}$, 3) y ($\frac{-4+3\sqrt{5}}{2}$, 3)

c) Determine las ecuaciones de las asíntotas.

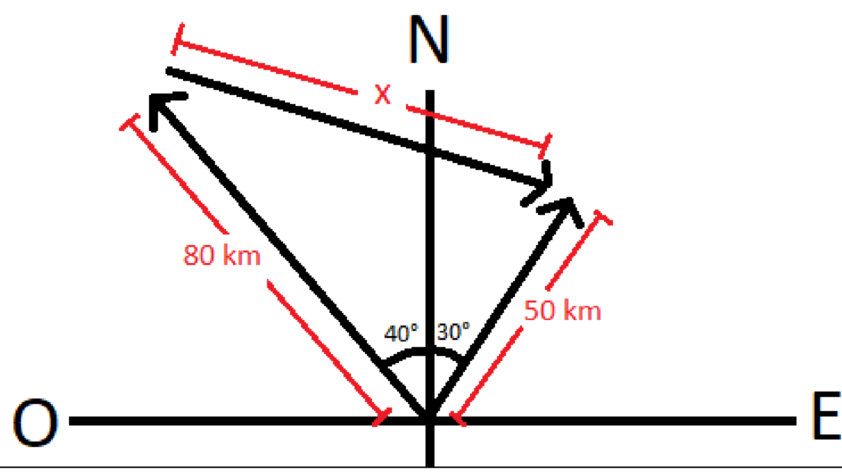
No.	Explicación	Operatoria
1.	Para encontrar las asíntotas, la ecuación estándar la igualamos a cero y despejamos la variable Y.	$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}}=1$ $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}}=0$ $\frac{(x+2)^2}{9}=\frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}}$ $\sqrt{\frac{(x+2)^2}{9}}=\sqrt{\frac{(y-3)^2}{\frac{9}{4}}}$ $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{\frac{3}{2}}$ $\frac{3}{2}\left(\frac{x+2}{3}\right)=y-3$ $\pm\left(\frac{x+2}{2}\right)+3=y$
2.	RESPUESTA:	$y=+\left(\frac{x+2}{2}\right)+3$ $y=-\left(\frac{x+2}{2}\right)+3$

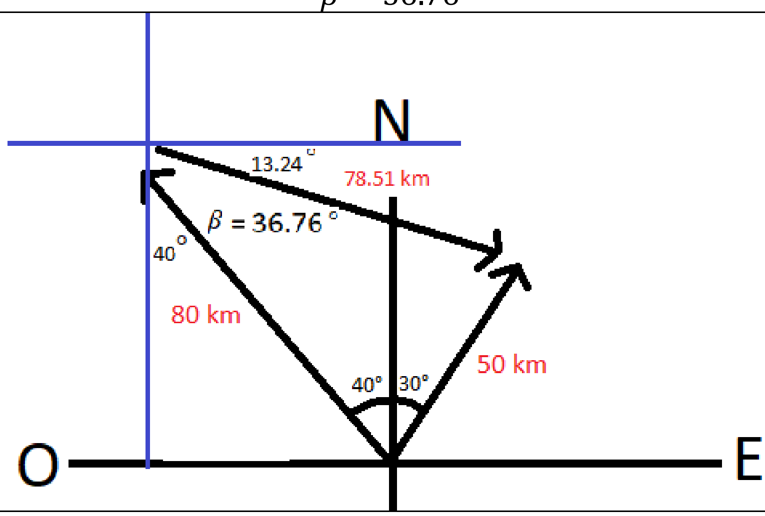
d) Grafique la hipérbola, las asíntotas, los vértices, los focos y el centro.



Tema 2 (20 puntos)

Dos barcos parten del mismo puerto, el barco A parte en dirección N 30° E; mientras que el barco B parte en dirección N 40° O. Cuando el barco B se encuentra a 80 kilómetros del puerto de partida y el barco A se encuentra a 50 kilómetros, éste último reporta que tiene problemas y debe evacuar la embarcación. Si el barco B irá en apoyo del barco A, ¿qué distancia debe recorrer desde su posición actual hasta la posición del barco A? ¿En qué dirección debe navegar?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizamos una representación con los datos proporcionado por el problema.	

2.	Dado que se conocen dos lados adyacentes y un ángulo formado por esos lados, podemos utilizar la ley de cosenos	$x^2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos(\theta)$
3.	Sustituimos en la expresión	Donde: • a = 80 km, • c=50 km • $\theta = 40° + 30° = 70°$ $x^2 = 80^2 + 50^2 - 2(80)(50) * \cos(70)$ $x = \sqrt{80^2 + 50^2 - 2(80)(50) * \cos(70)}$ $x = 78.51\ km$
4.	Dado que ahora conocemos todos los lados y un ángulo, podemos utilizar la ley de senos para conocer a que dirección deberá navegar el barco.	$\frac{c}{sen(\theta)} = \frac{x}{sen(70.51)}$ $\frac{50}{sen(\beta)} = \frac{78.51}{sen(70)}$ $50sen(70) = 78.51sen(\beta)$ $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{50sen(70)}{78.51}\right)$ $\beta = 36.76\,°$
5.	Representamos los datos, encontramos los ángulos	
6.	RESPUESTA	La distancia que deberá recorrer es de 78.51 km y la dirección es de 13.24 ° de norte a este para que pueda llegar a la posición del barco A.

Tema 3 (40 puntos)

Resuelva las ecuaciones en (a), (b) y (c); demuestre la identidad en (d).

a) $4\log_3\left(\frac{1}{x^4}\right) + 3\log_9 x^4 - \log_{27} x^3 = 11$

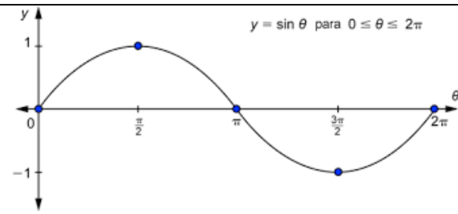
No.	Explicación	Operatoria
1.	Como primer paso aplicamos la propiedad de logaritmos	$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ $\log_3\left(\frac{1}{x^4}\right) = -\log_3(x^4)$
2.	Simplificamos	$4(-\log_3(x^4)) + 3\log_9(x^4) - \log_{27}(x^3) = 11$ $-4\log_3(x^4) + 3\log_9(x^4) - \log_{27}(x^3) = 11$
3.	Aplicamos la propiedad de logaritmo	$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ $\log_3(x^4) = \frac{\log_9(x^4)}{\log_9(3)}$
4.	Simplificamos y resolvemos	$-4 * \frac{\log_9(x^4)}{\log_9(3)} + 3\log_9(x^4) - \log_{27}(x^3) = 11$ $-4 * \frac{\log_9(x^4)}{\log_9(3)} = \frac{-4 * \log_9(x^4)}{\log_9(3)} = \frac{-4 * \log_9(x^4)}{\log_9(3)} = \frac{-4 * \log_9(x^4)}{\log_{3^2}(3)} = \frac{-4 * \log_9(x^4)}{\frac{1}{2}}$ $= -8 * \log_9(x^4)$ $-8\log_9(x^4) + 3\log_9(x^4) - \log_{27}(x^3) = 11$
5.	Sumamos logaritmos con misma base y con el mismo antilogaritmo	$-5\log_9(x^4) + \log_{27}(x^3) = 11$
6.	Aplicamos la propiedad de logaritmo y simplificamos	$\log_9(x^4) = \frac{\log_{27}(x^4)}{\log_{27}(9)}$ $\frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\log_{27}(9)} + \log_{27}(x^3) = 11$ $\frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\log_{27}(9)} = \frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\log_{3^3}(9)} = \frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\frac{1}{3}\log_3(9)} = \frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\frac{1}{3} * 2 * \log_3(3)} = \frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\frac{2}{3}}$ $\frac{-5 * \log_{27}(x^4)}{\frac{2}{3}} + \log_{27}(x^3) = 11$

		$\frac{-15 * \log_{27}(x^4)}{2} + \log_{27}(x^3) = 11$
7.	Aplicamos la propiedad de logaritmo	$\log_a(x^b) = b * \log_a(x)$ $\log_{27}(x^3) = 3 * \log_{27}(x)$ $\log_{27}(x^4) = 4 * \log_{27}(x)$ $\frac{-15 * 4 * \log_{27}(x)}{2} + 3 * \log_{27}(x) = 11$
8.	Sumamos logaritmos con misma base y con el mismo antilogaritmo	$-30 * \log_{27}(x) + 3 * \log_{27}(x) = 11$ $-33 * \log_{27}(x) = 11$
9.	Dividimos la ecuación por -33	$(-33 * \log_{27}(x) = 11) \quad /-33$ $\log_{27}(x) = -\frac{1}{3}$
10.	Aplicamos la propiedad logarítmica	$\log_a(b) = c \qquad \rightarrow \qquad b = a^c$ $\log_{27}(x) = -\frac{1}{3}$ $x = (27)^{-\frac{1}{3}}$ $x = \frac{1}{3}$
11.	Comprobamos	$4\log_3\left(\frac{1}{x^4}\right) + 3\log_9 x^4 - \log_{27} x^3 = 11$ $4\log_3\left(\frac{1}{\frac{1^4}{3}}\right) + 3\log_9 \frac{1^4}{3} - \log_{27} \frac{1^3}{3} = 11$ $11 = 11$
12.	RESPUESTA	$x = \frac{1}{3}$

b) $3^{3x+1} - 28(3^{2x}) + 3^{x+2} = 0$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como primer paso buscaremos un término que contengan una misma base y exponente.	$3^{3x} * 3^1 - 28(3^{2x}) + 3^x * 3^2 = 0$
2.	Para facilitar la operatoria u será nuestra variable.	$u = 3^x$
3.	Sustituimos en la expresión	$3u^3 - 28u^2 + 9u = 0$
4.	Factor común	$u(3u^2 - 28u + 9) = 0$
5.	Igualamos a cero cada término para poder encontrar el valor de u.	$u = 0$ $3u^2 - 28u + 9 = 0$
6.	Utilizamos la formula cuadrática para encontrar u	$3u^2 - 28u + 9 = 0$ $u = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$ $u = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 108}}{6}$ $u = \frac{28 \pm 26}{6}$ $u_1 = \frac{28+26}{6}$ $u_2 = \frac{28-26}{6}$ $u_1 = 9$ $u_2 = \frac{1}{3}$
7.	Sabemos que $u = 3^x$ por lo tanto sustituimos	$u_1 = 9$ $u_2 = \frac{1}{3}$ $3^x = 9$ $3^x = \frac{1}{3}$
8.	Resolvemos para encontrar el valor de x, al tener bases iguales podemos cancelarlas	$3^x = 9$ $3^x = \frac{1}{3}$ $(3)^x = (3)^2$ $(3)^x = (3)^{-1}$ $x = 2$ $x = -1$
9.	RESPUESTA	$x = 2$ $x = -1$

c) $3 - 3\cos^2 x + \sin x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$

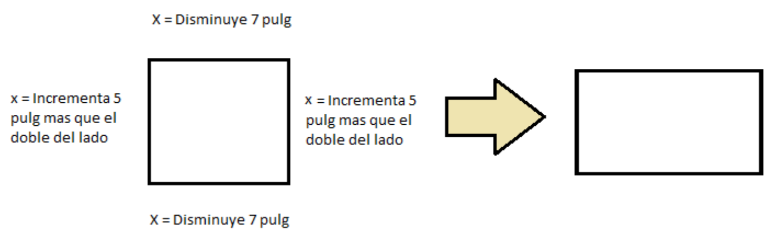
No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizamos la siguiente identidad	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
2.	Sustituimos en la ecuación para tener la expresión en términos de sin	$3 - 3(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$
3.	Simplificamos	$3 - 3 + 3\sin^2 x + \sin x = 0$ $3\sin^2 x + \sin x = 0$
4.	Factor común, y encontramos el valor de x	$\sin x\,(3\sin x + 1) = 0$ $\sin x = 0$ $\quad$ $3\sin x + 1 = 0$ $x = \sin^{-1}(0)$ $\quad$ $x = \sin^{-1}(\frac{-1}{3})$ $x = 0$ $\quad$ $x = -0.33$
5.	El problema nos da un intervalo de $0 \leq x < 2\pi$, Por lo tanto, se buscan soluciones dentro de eso rango, para este problema.	
6.	RESPUESTA	Cuando x = 0 $\quad$ 0,π,2π Cuando x = -0.33 $\quad$ -0.33+ π

d) $\frac{\tan x}{1+\sec x} + \frac{1+\sec x}{\tan x} = 2\csc x$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizamos las siguientes identidades y sustituimos	$\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \sec x = \frac{1}{\cos(x)}$
2.	Sustituimos las identidades	$\frac{\tan x}{1+\sec x} + \frac{1+\sec x}{\tan x} = 2\csc x$ $\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1+\frac{1}{\cos(x)}} + \frac{1+\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = 2\csc x$
3.	Operamos cada termino	$\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)}} + \frac{\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = 2\csc x$
4.	Dividimos las fracciones	$\frac{\cos(x)(\sin(x))}{\cos(x)(\cos(x)+1)} + \frac{\cos(x)(\cos(x)+1)}{\cos(x)(\sin(x))} = 2\csc x$
5.	Eliminamos términos	$\frac{(\sin(x))}{\cos(x)+1} + \frac{\cos(x)+1}{(\sin(x))} = 2\csc x$
6.	Reducimos la ecuación encontrando un denominador en común	$\frac{\sin^2(x)+(\cos(x)+1)^2}{(\cos(x)+1)(\sin(x))} = 2\csc x$
7.	Resolvemos el binomio cuadrado	$\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)+2(\cos(x))+1}{(\cos(x)+1)(\sin(x))} = 2\csc x$
8.	Sabemos que $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ por lo tanto reducimos la expresión y simplificamos	$\frac{1+2(\cos(x))+1}{(\cos(x)+1)(\sin(x))} = 2\csc x$ $\frac{2+2(\cos(x))}{(\cos(x)+1)(\sin(x))} = 2\csc x$
9.	Realizamos factor común	$\frac{2(1+(\cos(x)))}{(\cos(x)+1)(\sin(x))} = 2\csc x$
10.	Eliminamos términos y reducimos	$\frac{2}{(\sin(x))} = 2\csc x$ $2\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) = 2\csc x$
11.	Sabemos que $\frac{1}{\sin(x)} = \csc x$	$2\csc x = 2\csc x$
	RESPUESTA	$2\csc x = 2\csc x$

Tema 4 (20 puntos)

Si cada uno de dos lados opuestos de un cuadrado se incrementa 5 pulgadas más que el doble del lado del cuadrado, y cada uno de los otros lados opuestos se disminuye en 7 pulgadas, el área del rectángulo resultante supera en 55 pulgadas cuadradas al área del cuadrado inicial. Halle la longitud del lado del cuadrado.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Representamos los datos que nos proporciona el problema	
2.	Planteamos las variables	x = lado del cuadrado $A_{rect} = A_{cuad.} + 55$ $A_{cuad.} = x^2$
3.	Planteamos una ecuación respecto a los datos proporcionados	$A_{rect} = A_{cuad.}$ $x^2 + 55 = (2x + 5) * (x - 7)$
4.	Resolvemos la ecuación	$x^2 + 55 = (2x + 5) * (x - 7)$ $x^2 + 55 = 2x^2 - 14x + 5x - 35$ $-x^2 + 9x + 90 = 0 \quad /-1$ $x^2 - 9x - 90 = 0$ $x = 15 \qquad x = 6$
	RESPUESTA	La longitud del lado del cuadrado es de 15 pulg.