UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-101-6-V-2-00-2020-sN

CURSO:	**Matemática Básica 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**101**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
HORARIO DE EXAMEN:	**Vespertina**
FECHA DE EXAMEN:	**21 de enero de 2020**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Katelyn Gissell Pérez Leiva**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Katelyn Gissell Pérez Leiva**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

EXAMEN DE SEGUNDA RETRASADA
TEMARIO TA

Tema 1 (20 puntos)
Un hombre dispone de 4.5 horas y quiere dar un paseo en bicicleta a una velocidad de 16 km/h y regresar caminando por el mismo recorrido a una velocidad de 3.5 km/h. ¿Hasta qué distancia puede alejarse del punto de partida?

Tema 2 (40 puntos)
Resuelva la desigualdad en(a), y las ecuaciones en (b) y (c).

a) $\dfrac{3}{2x+3} \geq \dfrac{1}{x-2}$

b) $\dfrac{4-r^2}{2} - 2 = \dfrac{6}{4-r^2}$

c) $\sqrt{3}\,\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

Tema 3 (20 puntos)
Desde lo alto de un faro, a 175 pies sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco situado directamente al sur es de $\pi/4$ radianes. Dos minutos más tarde el ángulo de depresión es de $\pi/6$ radianes. Calcular la velocidad del barco si se observa que navega directamente hacia el norte.

Tema 4 (15 puntos)
Un alambre de 60 pulgadas de largo se corta en dos partes. Con una parte se forma un cuadrado y con la otra un círculo. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿Cuánto miden de largo cada uno de los trozos de alambre?

Tema 5 (15 puntos)
Encontrar el centro, los vértices, los focos, las asíntotas (si las tiene) y dibuje la gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

SOLUCION DE EXAMEN

TEMA 1: (20 puntos)

Un hombre dispone de 4.5 horas y quiere dar un paseo en bicicleta a una velocidad de 16 km/h y regresar caminando por el mismo recorrido a una velocidad de 3.5 km/h. ¿Hasta qué distancia puede alejarse del punto de partida?

No.	Explicación	Operatoria
1	Se establece la variable x como la cantidad de kilómetros que puede alejarse del punto de partida. Se sabe que al multiplicar la velocidad por distancia se obtiene el tiempo. Utilizando los datos de distancia y el tiempo disponible se obtiene la ecuación:	$x * \frac{1\ h}{16\ km} + x * \frac{1\ h}{3.5\ km} = 4.5\ h$
2	Se simplifica la ecuación.	$\frac{x}{16} + \frac{x}{3.5} = 4.5$
3	Se resuelve la ecuación para x.	$\frac{39x}{112} = 4.5$ $39\,x = 4.5 * 112$ $x = \frac{504}{39}$ $x = 12.92$
4	Por lo tanto, la distancia que puede recorrer de acuerdo al tiempo que dispone es de:	$\boldsymbol{x = 12.92}$

TEMA 2: (40 puntos)

$$\textbf{a)}\ \boldsymbol{\frac{3}{2x+3} \geq \frac{1}{x-2}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Despejamos y simplificamos.	$\frac{3}{2x+3} - \frac{1}{x-2} \geq 0$ $\frac{3(x-2)-(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} \geq 0$ $\frac{(3x-6)-(2x+3)}{(2x+3)(x-2)} \geq 0$ $\frac{3x-6-2x-3}{(2x+3)(x-2)} \geq 0$ $\frac{x-9}{(2x+3)(x-2)} \geq 0$

<table>
<tr><td>2</td><td>Encontramos los valores críticos.</td><td>Para x-9=0
$\boldsymbol{x = 9}$
Para 2x+3=0
$\boldsymbol{x = \frac{-3}{2}}$
Para x-2=0
$\boldsymbol{x = 2}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Se elabora la tabla de signos de la función.</td><td>$$f(x) = \frac{x-9}{(2x+3)(x-2)}$$
<table>
<tr><td>Intervalo</td><td>(-∞,$\frac{-3}{2}$)</td><td>($\frac{-3}{2}$, 2)</td><td>(2,9)</td><td>(9, +∞)</td></tr>
<tr><td>k</td><td>-2</td><td>1</td><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td>x-9</td><td>(-)</td><td>(-)</td><td>(-)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>2x+3</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(+)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>x-2</td><td>(-)</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(-)</td><td>(+)</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Se seleccionan los intervalos menores a cero.</td><td>$x \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right) U \ (2,9]$</td></tr>
</table>

Respuesta:

$$\boldsymbol{x \in \left(-\infty, \frac{-3}{2}\right) U \ (2, 9]}$$

$$\boldsymbol{b)\, \frac{4-r^2}{2} - 2 = \frac{6}{4-r^2}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Despejamos y simplificamos.	$(4-\mathrm{r}^2)\left(\frac{4-\mathrm{r}^2-4}{2}\right)=6$ $(4-\mathrm{r}^2)\left(\frac{-\mathrm{r}^2}{2}\right)=6$ $(4-\mathrm{r}^2)\left(\frac{-\mathrm{r}^2}{2}\right)-6=0$ $\left(\frac{-4\mathrm{r}^2+r^4}{2}\right)-6=0$ $\left(\frac{r^4-4\mathrm{r}^2}{2}\right)-6=0$ $\left(\left(\frac{r^4-4\mathrm{r}^2}{2}\right)-6=0\right)*2$ $r^4-4\mathrm{r}^2-12=0$ $(r^2)^2-4\mathrm{r}^2-12=0$
2	Sustituimos para $r^2\ con\ u$	$u^2-4u-12=0$
3	Encontramos los valores para u con la formula cuadrática.	$\mathrm{u}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4^2-4(1)(-12)}}{2(1)}$ $u_1=6$ $u_2=-2$
4	Se encuentran los valores para x utilizando los valores de u.	Para $r^2=6$ $r=\pm\sqrt{6}$ Para $r^2=-2$ $r=\pm\sqrt{2}i$

Respuesta:

$$\boldsymbol{r=\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{r=\pm\sqrt{2}i}$$

c) $\sqrt{3}\,\mathbf{sen}\,x + \mathbf{cos}\,x = \mathbf{1}$

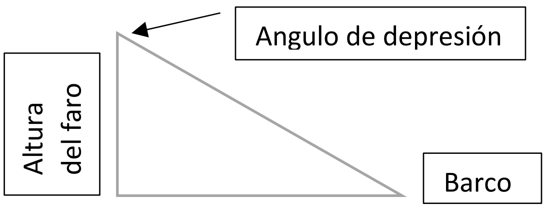
No.	Explicación	Operatoria
1	Restar cos (x) de ambos lados.	$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1 - \cos(x)$
2	Elevar al cuadrado ambos lados.	$(\sqrt{3}\,\text{sen}\,x)^2 = (1 - \cos(x))^2$
3	Restar $(1 - \cos(x))^2$ de ambos lados.	$3sen^2(x) - (1 - \cos(x))^2 = 0$
4	Utilizar la identidad: $(1 - \cos(x))^2 = sen^2(x)$	$3(1 - \cos(x))^2 - (1 - \cos(x))^2 = 0$
5	Simplificar.	$2\cos(x) - 4cos^2(x) + 2 = 0$ $-4cos^2(x) + 2\cos(x) + 2 = 0$
6	Sustituir cos(x)=u	$-4u^2 + 2\text{u} + 2 = 0$
7	Resolver para u	$\text{u} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-4)(2)}}{2(-4)}$ $u_1 = \dfrac{-1}{2}$ $u_2 = 1$
8	Sustituir en la ecuación cos(x)=u	Para $\cos(x) = \frac{-1}{2}$ $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n$ Para $\cos(x) = 1$ $x = 2\pi n$

Respuesta:

$$\boldsymbol{x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n}$$
$$\boldsymbol{x = 2\pi n}$$

TEMA 3: (20 puntos)

Desde lo alto de un faro, a 175 pies sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco situado directamente al sur es de $\pi/4$ radianes. Dos minutos más tarde el ángulo de depresión es de $\pi/6$ radianes. Calcular la velocidad del barco si se observa que navega directamente hacia el norte.



No.	Explicación	Operatoria
1	Se proyecta un triangulo donde la altura del faro será el cateto opuesto, usando la tangente se encuentra la distancia entre el faro hasta el punto inicial y desde el faro hasta el segundo punto.	$\tan(\theta) = \frac{cat\ opuesto}{cat\ adyacente}$ $cat\ adyacente = \frac{cat\ opuesto}{\tan(\theta)}$ $cat\ adyacente\ (punto\ inicial) = \frac{175\ pies}{\tan(\pi/4)}$ $cat\ adyacente\ (punto\ inicial) = 175\ pies$ $cat\ adyacente\ (punto\ final) = \frac{175\ pies}{\tan(\pi/4)}$ $cat\ adyacente\ (punto\ final) = 303.11$
2	Ahora se proyecta un triángulo sobre la superficie del mar, siendo la distancia desde el faro al punto1 el cateto adyacente y la distancia desde el faro al punto 2 la hipotenusa, se obtiene el Angulo que forman ambos puntos en el faro usando coseno.	$\cos(\theta) = \frac{cat\ adyacente}{hipotenusa}$ $\theta = \arccos\left(\frac{cat\ adyacente}{hipotenusa}\right)$ $\theta = \arccos\left(\frac{175}{303.11}\right)$ $\theta = 0.96\ rad$
3	Se obtiene la distancia entre puntos.	$sen(\theta) = \frac{cat\ opuesto}{hipotenusa}$ $cateto\ opuesto = sen(\theta) * hipotenusa$ $cateto\ opuesto = sen(0.96) * 303.11$ $cateto\ opuesto = 298.14\ pies$
4	Finalmente se obtiene la velocidad.	$v = d/t$ $v = 298.14 pies/120\ s$ v =2.48 pies/s

Respuesta:

El barco navega hacia el norte con una velocidad de 2.48 pies/s.

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**

Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

TEMA 4: (15 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1	Para formar el cuadrado, se establece una medida x que expresa su perímetro. Para el circulo, la medida establecida es *60-x*, que también es su perímetro.	$P_{cuadrado} = x$ $P_{circulo} = 60 - x$
2	Para conocer el área de cada figura, se debe determinar el lado del cuadrado y el radio del circulo. Por lo tanto, se recurre a la fórmula de estos.	$P_{cuadrado} = 4l$ $P_{circulo} = 2\pi r$
3	Igualando ambas ecuaciones para encontrar los valores correspondientes.	$l = \frac{\pi}{4}$ $r = \frac{60 - x}{2\pi}$
4	Con estos valores definidos, se utilizan las fórmulas de área de cada figura.	$A_{cuadrado} = l^2 = \frac{x^2}{16}$ $A_{circulo} = \pi r^2 = \frac{(60 - x)^2}{4\pi}$
5	Igualando las ecuaciones obtenidas.	$\frac{x^2}{16} = \frac{(60 - x)^2}{4\pi}$
6	Simplificando la ecuación.	$\pi x^2 = 14400 - 480x + 4x^2$ $(4 - \pi)x^2 - 480x + 14400 = 0$
7	Utilizando la formula cuadrática para resolver la ecuación.	$x_1 = 527.37$ $x_2 = 31.81$
8	La solución a la ecuación es el valor menor a 60 pulgadas.	$\boldsymbol{x_2 = 31.81}$

TEMA 5: (15 puntos)

Encontrar el centro, los vértices, los focos, las asíntotas (si las tiene) y dibuje la gráfica de la cónica cuya ecuación es

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Se convierte a ecuación canónica para determinar el tipo de cónica.	$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
2	Al determinar que es una hipérbola, se encuentran los valores de h, k, a y b.	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ $\boldsymbol{a = 4}$ $\boldsymbol{b = 3}$ $\boldsymbol{h = 2}$ $\boldsymbol{k = -1}$
3	Se calcula el centro.	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{16 + 9}$ $\boldsymbol{c = 5}$
4	Se calculan los vértices.	$(h \pm a; k)$ $(2 + 4; -1) = (\mathbf{6}; -\mathbf{1})$ $(2 - 4; -1)=(-\mathbf{2}; -\mathbf{1})$
5	Se calculan los focos.	$(h \pm c; k)$ $(2 + 5; -1) = (\mathbf{7}; -\mathbf{1})$ $(2 - 5; -1)=(-\mathbf{3}; -\mathbf{1})$
6	Se calculan las asíntotas.	$y = \pm\frac{b}{a}(x-h) + k$ $y = \frac{b}{a}(x-h) + k$ $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}(x-2) - 1}$ $y = -\frac{b}{a}(x-h) + k$ $\boldsymbol{y = -\frac{3}{4}(x-2) - 1}$

Respuestas:

Centro:

$$c = 5$$

Vértices:

$$(6; -1)$$

$$(-2; -1)$$

Focos:

$$(7; -1)$$

$$(-3; -1)$$

Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}(x - 2) - 1$$

$$y = -\frac{3}{4}(x - 2) - 1$$