UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-1-M-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**11 de Septiembre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Darwin Santos**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Darwin Santos**
COORDINADO POR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

PRIMER EXAMEN PARCIAL

TEMARIO TR

Tema 1 (25 puntos)

Evalúe en forma analítica los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ b) $\lim_{u \to -1} \frac{u^3+1}{u^2-1}$ c) $\lim_{t \to 0} \frac{sen2t + tan3t}{t}$

Tema 2 (15 puntos)

Encuentre la derivada de la función *f* usando la definición de derivada como límite.

$$f(x) = 1 - \sqrt{1+x}$$

Tema 3 (20 puntos)

a) Encuentre $f''(x)$ usando reglas de derivación para $f(x) = x^3 senx + \frac{tanx}{e^x cosx}$

b) Sea $f(1) = 2, f'(1) = -3, g(1) = 6, g'(1) = 2$. Encuentre P´(1) y Q´(1) si:

$$P(x) = 2f(x) * g(x) \qquad Q(x) = \frac{2g(x)}{3f(x)}$$

Tema 4 (20 puntos)

Encuentre los valores de a y b de tal manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x \le 1 \\ ax+b & si \quad 1 < x \le 3 \\ 3x-8 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Tema 5 (20 puntos)

Encuentre los puntos sobre la gráfica de la función donde las rectas tangentes son horizontales y determine las ecuaciones de dichas rectas.

$$f(x) = \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - 3x + \frac{175}{15}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (25 puntos)

Evalúe en forma analítica los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{u\to-1} \frac{u^3+1}{u^2-1}$ c) $\lim\limits_{t\to0} \frac{sen2t+tan3t}{t}$

No.	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Para el primer limite, al evaluar directamente obtendremos un resultado no exacto, más que valores alejados muy grandes por la izquierda de nuestro plano cartesiano, por tal razón vamos a manipular la expresión con su conjugado para poder una expresión más simple.	*Manipulando con el conjugado:* $x+\sqrt{x^2-x+1}*\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ $\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$
2.	Si aplicamos el limite nos va dar una forma indeterminada, por lo cual hay que hacer una nueva manipulación algebraica para poder eliminar	$\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}*\frac{-1/x}{-1/x}$
3.	Al aplicar la manipulación y simplificar la expresión aplicamos el limite hacia la tendencia, recordando que cuando tenemos un número muy pequeño divido otro muy grande el resultado es cero.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-1-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$
4.	Simplificamos la expresión y obtenemos el resultado del límite propuesto.	$\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{1}{2}$

R// $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x+1}$

b) $\lim_{u \to -1} \frac{u^3+1}{u^2-1}$

No.	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Al aplicar el limite directamente tenemos una forma indeterminada	$\lim_{u \to -1} \frac{u^3+1}{u^2-1} = \frac{-1^3+1}{(-1^2)-1} = \frac{0}{0}$
2.	La forma más sencilla es descomponer el numerador en una diferencia de cubos, y el denominador una diferencia de cuadrados.	$u^3 + 1 = (u+1)(u^2 - u + 1)$ $u^2 - 1 = (u+1)(u-1)$
3.	Ya que descomponemos la fracción, eliminamos términos que puedan ayudarnos a dejar más simple la expresión y aplicamos el límite.	$\lim_{u \to -1} \frac{\cancel{(u+1)}(u^2 - u + 1)}{\cancel{(u+1)}(u-1)}$
4.	Siguiendo el procedimiento ahora aplicamos el límite y obtenemos así el resultado.	$\lim_{u \to -1} \frac{(u^2 - u + 1)}{(u-1)} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

R.// $\lim_{u \to -1} \frac{u^3+1}{u^2-1} = -\frac{3}{2}$

c) $\lim_{t \to 0} \frac{sen2t+tan3t}{t}$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Para resolver este límite tenemos varios caminos o formar se resolver, emplearemos la manera tradicional, llevarlo a una forma que se puedan eliminar términos por definición y simplificar	$Sabemos\ que:$ $\lim_{t \to 0} \frac{sennt}{nt} = 0$ $Dividimos\ la\ fracción\ en\ 2:$ $\frac{sen2t + tan3t}{t} = \frac{sen2t}{t} + \frac{tan3t}{t}$
2	Ya que hemos divido la fracción en 2 términos, ahora vamos a manipular cada una de ellas a modo de que tengamos una expresión como el limite por definición que podemos aproximar a cero.	$\frac{2}{2} * \frac{sen2t}{t} + \frac{3}{3} * \frac{\frac{Sen3t}{Cos3t}}{t}$ $2 + \frac{3}{cos3t}$ $Aplicando\ el\ limite:$ $\lim_{t \to 0} 2 + \frac{3}{cos3t}$ $Sabiendo\ que\ cos0 = 1$ $2 + 3 = 5$
3	Ya que se hacen las manipulaciones, nos da el resultado del limite propuesto.	$\lim_{t \to 0} \frac{sen2t + tan3t}{t} = 5$

R//

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen2t + tan3t}{t} = 5$$

Tema 2 (15 puntos)

Encuentre la derivada de la función f usando la definición de derivada como límite.

$$f(x) = 1 - \sqrt{1+x}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Para encontrar la derivada de la función propuesta hay que aplicar la definición que describiremos a continuación:	$Sabemos\ que:$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $Entonces:$ $f(x+h) = 1 - \sqrt{1+x+h}$
2	Ya que hemos reconocido los datos que necesitamos para encontrar la derivada por medio de definición, vamos a aplicar entonces el limite a la función propuesta	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x+h} - 1 + \sqrt{1+x}}{h}$ $Si\ aplicamos\ el\ limite\ nos\ quedaria\ una\ expresión\ indeterminada$
3	De manera directa no podemos aplicar el límite puesto que tendremos una expresión en la cual sea indeterminada, por tal razón simplificaremos la expresión y vamos a multiplicar por su conjugado para poder aplicar el límite a la función.	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{1+x+h} + \sqrt{1+x}}{h} * \frac{\sqrt{1+x+h} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x+h} + \sqrt{1+x}}$

4	Aplicando el conjugado a la expresión y simplificando quedaría de la siguiente manera	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1+x-(1+x+h)}{h(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x+h})}$
5	Para aplicar el límite simplificamos la expresión del paso 4 y quedaría:	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x+h}}$
6	Aplicando el límite y simplificando obtenemos el resultado.	$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}}}$
R// $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1+x}}}$		

Tema 3 (20 puntos)

a) Encuentre *f´(x)* usando reglas de derivación para *f(x)*=$x^3 senx + \frac{tanx}{e^x cosx}$

b) Sea $f(1) = 2, f´(1) = -3, g(1) = 6, g´(1) = 2$. Encuentre P´(1) y Q´(1) si:

$$P(x) = 2f(x) * g(x) \qquad Q(x) = \frac{2g(x)}{3f(x)}$$

a) Encuentre *f´(x)* usando reglas de derivación para *f(x)*=$\boldsymbol{x^3 senx + \frac{tanx}{e^x cosx}}$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Para este caso tenemos la combinación de un producto y una división de una derivada, debemos de recordar ambas tal y como se describe.	$Recordando\ que:$ $f(x) * g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ Este caso aplica para multiplicación. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)^2]}$

2	Notemos que en el denominador tenemos un producto, hay que considerarlo a la hora de derivar nuestra expresión, luego debemos de simplificar la expresión	$f(x)=x^3 senx + \frac{tanx}{e^x cosx}$ *Aplicando derivación:* $f'(x)=3x^2 senx + x^3 cosx + \frac{sec^2 x * e^x * cosx - tanx(e^x cosx - e^x senx)}{(e^x cosx)^2}$
3	Ahora únicamente simplificamos la expresión y así obtenemos la primer derivada de la función propuesta.	*Simplificando paso 2* $f'(x) = x^2(3senx + cosx) + \frac{secx - senx(1 - tanx)}{e^{2x} cos^2 x}$

R//

$$\boldsymbol{f'(x) = x^2(3senx + cosx) + \frac{secx - senx(1 - tanx)}{e^{2x}cos^2 x}}$$

b) Sea $f(1) = 2, f'(1) = -3, g(1) = 6, g'(1) = 2$. Encuentre P´(1) y Q´(1) si:

$$P(x) = 2f(x) * g(x) \qquad Q(x) = \frac{2g(x)}{3f(x)}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	En este problema únicamente tenemos que aplicar los mismos teoremas que en el inciso a del presente tema, a diferencia que debemos dejar afuera las expresiones constantes y multiplicarlas al final del problema.	$Recordando\ que$: $f(x) * g(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ Este caso aplica para multiplicación. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)^2]}$
2	Para P(x) debemos aplicar la regla de un producto, al final de aplicar la regla ya sustituimos los datos proporcionados en el problema, para Q(x) el mismo caso.	*Para P(x):* $P'(x)=2[f'(x)g(x)+g'(x)f(x)]$ $P'(1)=2[(-3)(6)+(2)(2)]=$ $\mathbf{P(1)=-28}$ $Q'(x)=\frac{2}{3}\left[\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{[f(x)^2]}\right]$ $Q'(x)=\frac{2}{3}\left[\frac{(2)(2)-(-3)(6)}{4}\right]$ $\mathbf{Q'(1)=\frac{11}{3}}$
3	De esta manera obtenemos el resultado al problema propuesto.	$\mathbf{P(1)=-28}$ $\mathbf{Q'(1)=\frac{11}{3}}$

R// $P(1)=-28$

$Q'(1)=\frac{11}{3}$

Tema 4 (20 puntos)

Encuentre los valores de a y b de tal manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x \leq 1 \\ ax+b & si \ 1 < x \leq 3 \\ 3x-8 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Para encontrar los valores desconocidos en la función y determinar su continuidad es necesario comprobar el límite por la izquierda y por la derecha del primer tramo con el segundo, y el segundo con el tercero.	$\lim_{x\to 1^-} x+4 = \lim_{x\to 1^+} ax+b$ $Aplicando\ el\ limite$: $\boldsymbol{5 = a+b}$ **Ecuación 1**
2	Procedemos a realizar lo mismo para el tramo 2 y 3, luego de realizar esto obtendremos una segunda ecuación, podemos despejar a o b de cualquier ecuación, sustituimos el despeje en la otra ecuación y de esta manera encontrar los valores que estamos buscando.	$\lim_{x\to 3^-} ax+b = \lim_{x\to 3^+} 3x-8$ $\boldsymbol{3a+b=1}$ **Ecuación 2** $despejando\ a\ de\ ec\ 1$: a= 5-b Sustituyendo en ec 2 a 3(5-b)+b=1 $Resolviendo\ las\ ec.$ a= -2 b=7

3	De esta manera obtenemos el resultado al problema propuesto.	***a*= -2** ***b*=7**

R// ***a*= -2**
***b*=7**

Tema 5 (20 puntos)

Encuentre los puntos sobre la gráfica de la función donde las rectas tangentes son horizontales y determine las ecuaciones de dichas rectas.

$$f(x) = \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - 3x + \frac{175}{15}$$

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	Los casos típicos para encontrar ecuaciones de la recta es con 2 coordenadas conocidas en el problema, para este caso tenemos un dato bien importante y es que las rectas tangentes en los puntos de inflexión(cambio de concavidad) son horizontales	$f(x) = \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - 3x + \frac{175}{15}$

2	Cuando tenemos rectas horizontales debemos de recordar que las pendientes serán igual a cero ya que la recta se mantiene constante a lo largo del plano cartesiano, y recordando que para igualar con la pendiente debemos de calcular la primera derivada de la función propuesta.	$Recordando:$ $f'(x) = m = 0(Recta\ Horizontal)$ $f(x) = \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - 3x + \frac{175}{15}$ $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{5} = 0$
3	Ahora para encontrar los puntos donde las rectas tangentes son horizontales únicamente debemos resolver la ecuación resultante de la primera derivada sabiendo que la pendiente es cero y los puntos que encontremos será nuestro resultado.	$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{5} = 0$ $Resolviendo\ para\ f'(x)$ $\boldsymbol{x1 = 3}$ $\boldsymbol{x2 = -5}$
4.	Con los puntos encontrados, evaluamos cada uno de ellos en la función y encontraremos la función en Y, y por tal razón las ecuaciones de la recta.	$Valuando\ X1\ y\ X2\ en\ f(x)$ $f(3) = \frac{1}{15}(3)^3 + \frac{1}{5}(3)^2 - 3(3) + \frac{175}{15}$ $\boldsymbol{= 6.27}$ $f(-5) = \frac{1}{15}(-5)^3 + \frac{1}{5}(-5)^2 - 3(-5) + \frac{175}{15}$ $\boldsymbol{= 23.3}$

R// Coordenadas (3,-5)
Ecuaciones de la recta Y1=6.27   Y2=23.3