UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

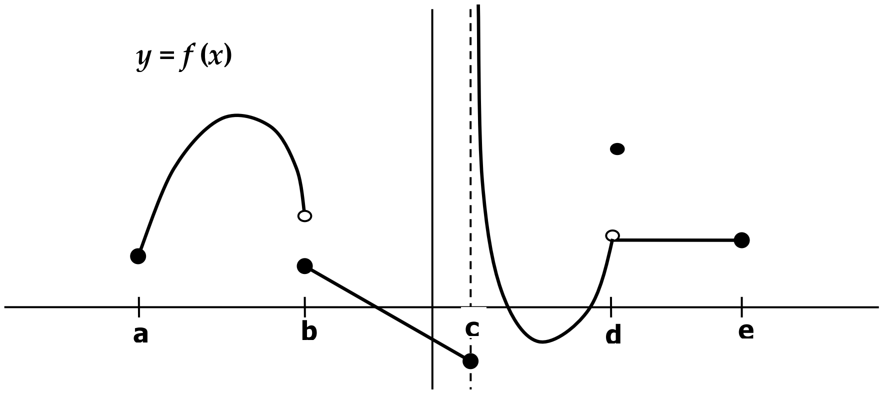
CLAVE-103-1-V-2-00-2019_M

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**11 de Septiembre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Inga Silvia Hurtarte**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Manuel García**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 2**

Temario Único 11/09/2019

MATEMATICA BASICA 2	**PRIMER EXAMEN PARCIAL**

TEMA	PROBLEMA	PUNTOS
1	Calcule los límites dados: 1. $\lim_{v \to 4} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert}$ 2. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$ 3. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$	24
2	Use la definición de derivada **como límite** para encontrar $f'(x)$ para $$f(x)=\frac{1}{x+2}$$	11
3	Para la siguiente gráfica, dibuje la gráfica en su cuadernillo y responda los incisos siguientes. a) ¿En qué puntos es f discontinua? Justifique sus respuestas. b) ¿En qué puntos es f no derivable? Justifique sus respuestas. c) ¿Existe alguna discontinuidad removible? ¿Dónde, y por qué es removible? d) Intervalos donde existe la primera derivada y se hace cero. 	15
4	Determine una parábola con ecuación $y=ax^2+bx+c$ que pase por (1,4) y cuyas rectas tangentes en $x=-1$ tenga pendiente igual a 6 y en $x=5$ tengan pendiente igual -2.	15
5	Determine la primera derivada de las funciones dadas: $a)\ \ g(t)=\frac{t^3\cos t}{1+\cos t}$ $b)\ \ y=e^{sen\,2x}+sen(x^2e^{2x})$	20
6	¿Para qué valor de la constante k la función f es continua en todos los reales? $$f(x)=\begin{cases} kx^2+2x & si\ x<2 \\ x^3-kx & si\ x\geq 2 \end{cases}$$	15

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (24 puntos)

Calcule los límites dados:

1. $\lim_{v \to 4} \frac{4-v}{|4-v|}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Dado a que existe una barra de valor absoluto dentro de la expresión, es necesario evaluar el límite por la izquierda y por la derecha. Evaluando el límite por la izquierda.	$\lim_{v \to 4^-} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert}$ $\lim_{v \to 4^-} \frac{4-v}{-(4-v)}$ $\lim_{v \to 4^-} 1$ $\lim_{v \to 4^-} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert} = -1$
2.	Evaluando el límite por la derecha.	$\lim_{v \to 4^+} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert}$ $\lim_{v \to 4^+} \frac{4-v}{(4-v)}$ $\lim_{v \to 4^+} 1$ $\lim_{v \to 4^-} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert} = 1$
3.	Analizando el límite por los dos lados se observa que tienden a un número diferente, quiere decir que el límite no existe.	$\lim_{v \to 4^+} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert} \neq \lim_{v \to 4^+} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert}$ $\lim_{v \to 4} \frac{4-v}{\lvert 4-v \rvert}$ = No Existe

1. R./ No existe el límite para $\lim_{v \to 4} \frac{4-v}{|4-v|}$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Evaluando el límite para poder determinar si existe.	$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} = \frac{0}{0}$
2.	Dado que el límite posee una expresión indeterminada, es necesario multiplicar por 1 la expresión, a través del conjugado del numerador.	$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} * \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$
3.	Simplificando la expresión del límite anterior.	$\lim_{x \to 2} \frac{2+x-2x}{(x^2-2x)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$ $\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$ $\lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$ $\lim_{x \to 2} \frac{-1}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$
3.	Evaluando nuevamente el límite con la nueva expresión.	$\lim_{x \to 2} \frac{-1}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})} = -\frac{1}{8}$

R./

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x^2-2x} = -\frac{1}{8}$$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{sen\, x}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Evaluando el límite para poder determinar si existe.	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{sen\, x} = \frac{0}{0}$
2.	Dado que el límite posee una expresión indeterminada, es necesario multiplicar por 1 la expresión, mediante la variable x.	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{sen\, x} * \frac{x}{x}$
3.	Simplificando la expresión del límite anterior.	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{sen\, x} * \frac{1/x}{1/x}$

4.	Aplicando los límites especiales de seno y coseno.	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{sen\,x} * \frac{1/x}{1/x} = \frac{0}{1}$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{sen\,x} = 0$

R./

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{sen\,x} = 0$$

Tema 2 (11 puntos)

Use la definición de derivada **como límite** para encontrar $f'(x)$ para

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

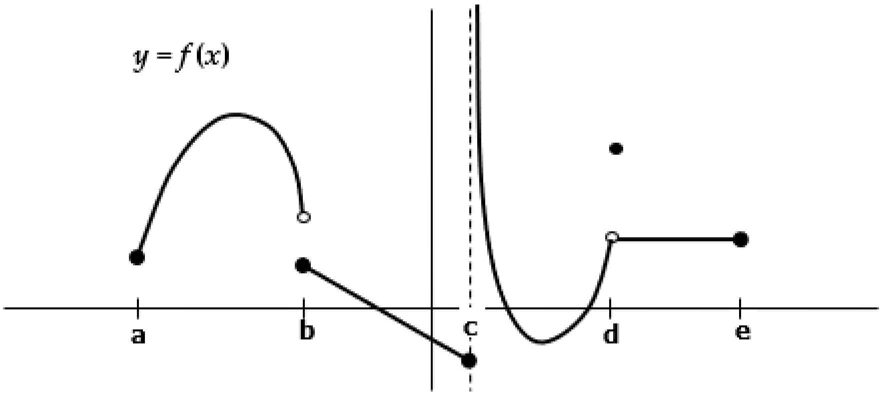
No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando la definición de la derivada y sustituyéndolo con la función.	$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+x+2} - \frac{1}{x+2}}{h}$
2.	Simplificando la expresión de f'(x)	$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+x+2} - \frac{1}{x+2}}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+2-h-x-2}{(h+x+2)(x+2)}}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+2-h-x-2}{(h+x+2)(x+2)}}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(h+x+2)(x+2)}}{h}$ $\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(h+x+2)(x+2)}$
3.	Evaluando el límite para encontrar el valor de f'(x).	$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{(h+x+2)(x+2)} = \frac{-1}{(x+2)^2}$

R./

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$$

Tema 3: (15 puntos)

Para la siguiente gráfica, dibuje la gráfica en su cuadernillo y responda los incisos siguientes.



a. ¿En qué puntos es f discontinua? Justifique sus respuestas.

No.	Explicación	Operatoria
1.	En b la función es discontinua por que el límite por la izquierda es distinto al de la derecha.	$\lim_{x\to b^-} f(x) \neq \lim_{x\to b^+} f(x)$
2.	En c la función es discontinua por que el límite por la izquierda es distinto al de la derecha.	$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c} f(x)$
3.	En d por que el limite de la función cuando tiende a d no es el mismo límite cuando tiende a d por la derecha ni por la izquierda.	$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c} f(x) \neq \lim_{x\to c+} f(x)$

R/. La función f es discontinua en b, c y d.

b. ¿En qué puntos es f no derivable? Justifique sus respuestas.

No.	Explicación	Operatoria
1.	En b la función es discontinua por que el límite por la izquierda es distinto al de la derecha.	$\lim_{x\to b^-} f(x) \neq \lim_{x\to b^+} f(x)$

2.	En c la función es discontinua por que el límite por la izquierda es distinto al de la derecha.	$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c} f(x)$
3.	En d por que el limite de la función cuando tiende a d no es el mismo límite cuando tiende a d por la derecha ni por la izquierda.	$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c} f(x) \neq \lim_{x\to c+} f(x)$

R/. La función f no es derivable en b, c y d.

c. ¿Existe alguna discontinuidad removible? ¿Dónde, y por qué es removible?

No.	Explicación	Operatoria
1.	En d ya que el límite por la izquierda es igual al de la derecha en d.	$\lim_{x\to d^-} f(x) = \lim_{x\to d^+} f(x)$

R/. La discontinuidad en d puede ser removible

d. Intervalos donde existe la primera derivada y se hace cero.

No.	Explicación	Operatoria
1.	En el intervalo entre d y e la derivada es igual a 0, ya que la pendiente en ese punto es una constante n.	En el intervalo (d,e) f(x) = n

R/. El intervalo en donde la primer derivada es igual a 0 es (d,e)

Tema 4: (15 puntos)

Determine una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que pase por (1,4) y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ tenga pendiente igual a 6 y en $x = 5$ tengan pendiente igual -2.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la derivada de la función y en términos de x. Dado a que la primer derivada de una función representa su pendiente.	$y = ax^2 + bx + c$ $y' = m = 2ax + b$
2.	Igualando la pendiente de la función con la pendiente del punto x=-1. Para determinar nuestra primer ecuación.	$m1 = m2$ $2ax + b = 6$ $2a(-1) + b = 6$ $-2a + b = 6$ (I)
3.	Igualando la pendiente de la función con la pendiente del punto x=5. Para determinar nuestra segunda ecuación.	$m1 = m3$ $2ax + b = -2$ $2a(5) + b = -2$ $10a + b = -2$ (II)

4.	Resolviendo el sistema de ecuaciones I y II, para determinar el valor de a y b.	$-2a + b = 6$ (I) $10a + b = -2$ (II) Entonces: a = $-\frac{2}{3}$ b = $\frac{14}{3}$
5.	Sustituyendo el valor de a y b en la función y.	$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + c$
6.	Para determinar el valor de c, se sustituye el punto (1,4) para determinar su valor.	$4 = -\frac{2}{3}(1)^2 + \frac{14}{3}(1) + c$ $c = 0$
7.	Sustituyendo el valor de c para determinar la función y.	$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + 0$ $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

R/ La función que satisface las condiciones dadas es

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$$

Tema 5: (20 puntos)

Determine la primera derivada de las funciones dadas:

$$a) \quad g(t) = \frac{t^3 \cos t}{1 + \cos t}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando la formula de la derivada de un cociente.	Si $g(t) = \frac{h(t)}{f(t)}$ $g'(t) = \frac{f(t)\frac{d}{dt} * h(t) - h(t)\frac{d}{dt} * f(t)}{f(t)^2}$
2.	Sustituyendo las funciones emergentes de g(t) par determinar la derivada de un cociente.	$g'(t) = \frac{(1+\cos t) * (t^3 \cos t)\frac{d}{dt} - (t^3 \cos t) * (1+\cos t)\frac{d}{dt}}{(1+\cos t)^2}$
3.	Determinando las derivadas de las funciones.	$g'(t) = \frac{(1+\cos t) * (2t^2 \cos t + t^3 sen\ t) - (t^3 \cos t) * (-sen\ t)}{(1+\cos t)^2}$
4.	Determinando la derivada de la función g(t)	$g'(t) = \frac{(1+\cos t) * (2t^2 \cos t + t^3 sen\ t) + (t^3 \cos t) * (sen\ t)}{(1+\cos t)^2}$

R/. La derivada de la función g(x) es:

$$g'(t) = \frac{(1+\cos t)*(2t^2\cos t + t^3 sen\ t) + (t^3\cos t)*(sen\ t)}{(1+\cos t)^2}$$

$b)\ \ y = e^{sen\ 2x} + sen(x^2e^{2x})$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Aplicando las propiedades de las derivadas.	$y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)\frac{d}{dx} + \left(sen\left(x^2e^{2x}\right)\right)\frac{d}{dx}$
2.	Realizando las derivadas por la regla de la cadena.	$y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)\frac{d}{dx} + \left(sen\left(x^2e^{2x}\right)\right)\frac{d}{dx}$ $y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)(sen\ 2x)\frac{d}{dx} + \left(cos\left(x^2e^{2x}\right)\right)\left(x^2e^{2x}\right)\frac{d}{dx}$ $y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)(cos\ 2x)(2x)\frac{d}{dx} + \left(cos\left(x^2e^{2x}\right)\right)\left((x^2)\frac{d}{dx}e^{2x} + (x^2)(e^{2x})\frac{d}{dx}\right)$ $y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)(cos\ 2x)(2) + \left(cos\left(x^2e^{2x}\right)\right)\left(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}\right)$

R/. La derivada de la función y es:

$$y' = \left(e^{sen\ 2x}\right)(cos\ 2x)(2) + \left(cos\left(x^2e^{2x}\right)\right)\left(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}\right)$$

Tema 6: (15 puntos)

¿Para qué valor de la constante k la función f es continua en todos los reales?

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & si\ x < 2 \\ x^3 - kx & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para poder determinar el valor de k y que la función f(x) sea continua, es necesario que el límite de la función cuando tiende a 2 por la izquierda y la derecha sea el mismo.	$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x)$ $\lim_{x\to2^-} kx^2 + 2x = \lim_{x\to2^+} x^3 - kx$
2.	Sustituyendo el valor de x=2 para determinar el valor de los límites.	$\lim_{x\to2^-} kx^2 + 2x = \lim_{x\to2^+} x^3 - kx$ $4k + 4 = 8 - 2k$

3.	Determinando el valor de k.	$4k + 4 = 8 - 2k$ $6k = 4$ $k = \frac{2}{3}$

R/. Para que la función f(x) sea continua, es necesario que k tenga el valor de:

$$k = \frac{2}{3}$$