UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-2-N-2-00-2019_sS_19

CURSO:	**Matemática básica 2**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
SEMESTRE:	**Segundo semestre**
JORNADA:	**Nocturna**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**11 de octubre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Adolfo Duarte Chamalé**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
MATEMÁTICA BÁSICA 2

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA 1 (10 pts):

Utilice el método de Newton para resolver la ecuación: $\sin(x^2+3) = x^3 - 6$

TEMA 2 (15 pts):

Indique si la función es creciente, decreciente, máximos, mínimos, concavidades, inflexiones, etc.

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x$$

TEMA 3 (15 pts):

Elaboraremos 10,000 conos vacíos cerrados con aluminio de espesor 0.1 mm, de 15 cm de diámetro y 20 cm de altura. Calcular cuánto material utilizaremos.

TEMA 4 (25 pts):

Calcule las dimensiones del máximo cono que se puede inscribir en una esfera de radio 50 cm.

TEMA 5 (20 pts):

a. $\displaystyle\int \frac{4x^5}{\sqrt[4]{x^3+2}}\, dx$

b. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{4t^5 \tan t^3}{\sqrt[4]{t^3+2}}\, dt$

TEMA 6 (20 pts):

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8e^x - 8 - 8x}{6x^2}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1

Utilice el método de Newton para resolver la ecuación:

$$\sin(x^2+3) = x^3 - 6$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Planteamos nuestra función y la derivamos.	$f(x) = \sin(x^2+3) - x^3 + 6$ $f'(x) = 2x\cos(x^2+3) - 3x^2$
2	Comenzamos nuestras iteraciones con un punto arbitrario inicial.	$x_o = 1$ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 1 - \frac{\sin(1^2+3) - 1^3 + 6}{2\cdot 1\cdot\cos(1^2+3) - 3\cdot 1^2} = 1.9851$
3	Iteramos hasta obtener el resultado con los decimales que consideremos adecuados.	$x_2 = 1.9851 - \frac{\sin(1.9851^2+3) - 1.9851^3 + 6}{2\cdot 1.9851\cdot\cos(1.9851^2+3) - 3\cdot 1.9851^2} = 1.8455$ $x_3 = 1.8455 - \frac{\sin(1.8455^2+3) - 1.8455^3 + 6}{2\cdot 1.8455\cdot\cos(1.8455^2+3) - 3\cdot 1.8455^2} = 1.8406$ $x_4 = 1.8406 - \frac{\sin(1.8406^2+3) - 1.8406^3 + 6}{2\cdot 1.8406\cdot\cos(1.8406^2+3) - 3\cdot 1.8406^2} = 1.8401$ $x_5 = 1.8401 - \frac{\sin(1.8401^2+3) - 1.8401^3 + 6}{2\cdot 1.8401\cdot\cos(1.8401^2+3) - 3\cdot 1.8401^2} = 1.8401$

$$\boxed{x \approx 1.8401}$$

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática
Matemática básica 2

Tema 2

Indique si la función es creciente, decreciente, máximos, mínimos, concavidades, inflexiones, etc.

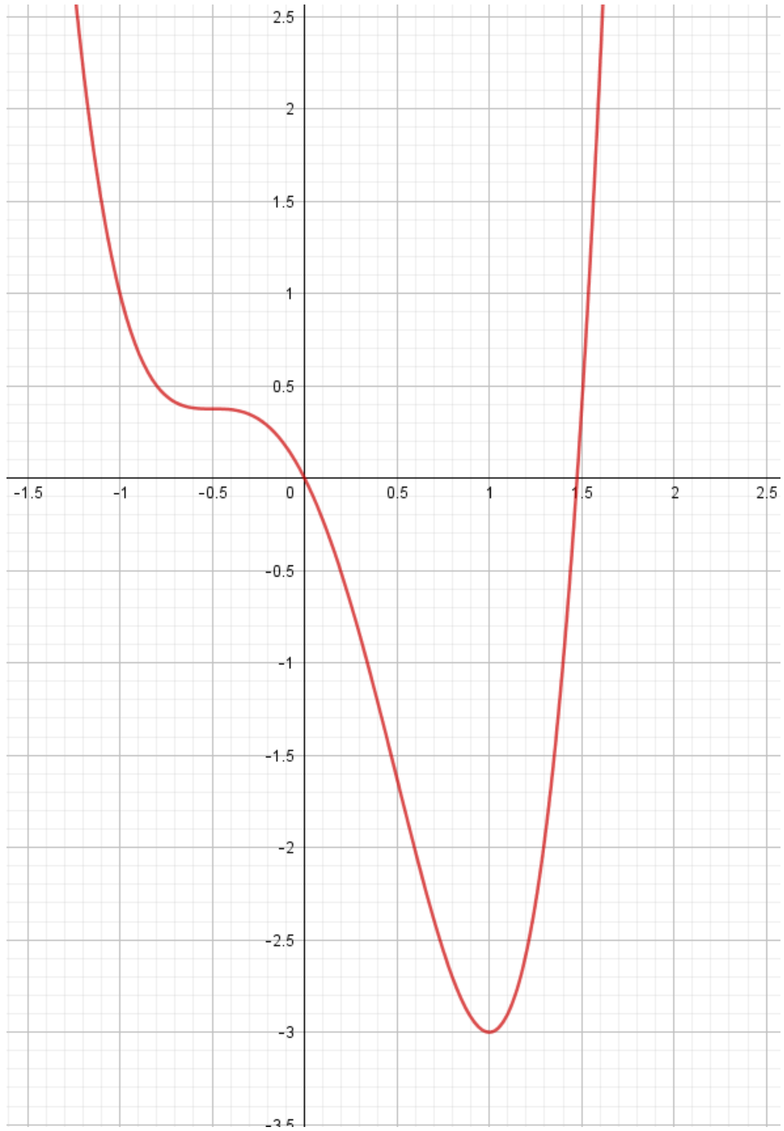
$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Derivamos nuestra función y hallamos las raíces.	$f'(x) = 8x^3 - 6x - 2$ $x_1 = 1\ , x_2 = -1/2\ , x_3 = -1/2$
2	Derivamos de nuevo nuestra función y hallamos las raíces.	$f''(x) = 24x^2 - 6$ $x_1 = -1/2\ , x_2 = 1/2$

Tabla:

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	-	+	Función decreciente, concavidad hacía arriba
$x = -\frac{1}{2}$	0	0	Punto de inflexión, función decreciente
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	-	-	Función decreciente, concavidad hacía abajo
$x = \frac{1}{2}$	-	0	Punto de inflexión, función decreciente
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	-	+	Función decreciente, concavidad hacía arriba
$x = 1$	0	+	Mínimo absoluto
$(1, \infty)$	+	+	Función creciente, concavidad hacía arriba

Gráfica:



Tema 3

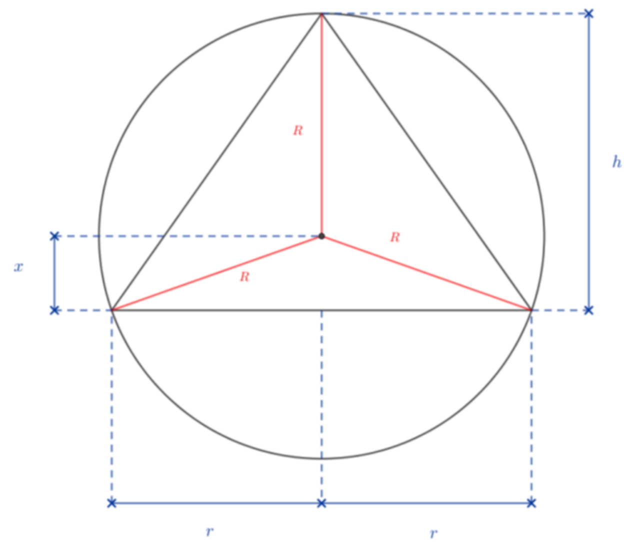
Elaboraremos 10,000 conos vacíos cerrados con aluminio de espesor 0.1 mm, de 15 cm de diámetro y 20 cm de altura. Calcular cuánto material utilizaremos.

No.	Explicación	Operatoria
1	Sabemos que el volumen de un cono es el siguiente.	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2	Hallamos el volumen aproximado de material que necesitamos para construir el cono, utilizando diferenciales.	$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h$ $\Delta V = \left(\frac{2}{3}\pi r h\right) \cdot \Delta r + \left(\frac{1}{3}\pi r^2\right) \cdot \Delta h$
3	Sustituimos los datos.	$\Delta V = \left[\frac{2}{3}\pi\left(\frac{15}{2}\right)(20)\right] \cdot (0.01) + \left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{15}{2}\right)^2\right] \cdot (0.01)$ $\Delta V = 3.731\ cm^3$
4	Procedemos a calcular el volumen total.	$V = 10{,}000 \cdot \Delta V = 10{,}000 \cdot 3.731\ cm^3$ $V = 37{,}310\ cm^3$

$$\boxed{V = 37{,}310\ cm^3}$$

Tema 4

Calcule las dimensiones del máximo cono que se puede inscribir en una esfera de radio 50 cm.

No.	Explicación	Operatoria
1	Tenemos el siguiente diagrama (corte transversal de la esfera y el cono), y las relaciones que podemos encontrar a partir de este.	 Donde: $R = 50$ $R + x = h$ $r^2 + x^2 = R^2$
2	Sabemos también que el volumen del cono es el siguiente.	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
3	Procedemos a hacer las sustituciones correspondientes para obtener una función de volumen en términos de una sola variable.	$x = h - 50$ $r^2 = 2500 - x^2 = 50 - (h-50)^2 = 100h - h^2$ $V(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^2)h$ $V(h) = \frac{1}{3}\pi(100h^2 - h^3)$
4	Derivamos nuestra función.	$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(200h - 3h^2)$

5	Igualamos la primera derivada a cero y resolvemos, para hallar los puntos críticos.	$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(200h - 3h^2) = 0$$ $$h(200 - 3h) = 0$$ $$h_1 = 0$$ $$h_2 = \frac{200}{3} \approx 66.67$$
6	Comprobamos el resultado (utilizando el criterio de la segunda derivada).	$$V''(h) = \frac{1}{3}\pi(200 - 6h)$$ $$V''\left(h = \frac{200}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left[200 - 6\left(\frac{200}{3}\right)\right] \approx -209.44$$ *El signo negativo indica concavidad hacía abajo (un máximo).
7	Hallamos el valor del radio.	$$r = \sqrt{100h - h^2} = \sqrt{100 \cdot \frac{200}{3} - \left(\frac{200}{3}\right)^2} \approx 47.14$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &\approx 47.14\ cm \\ h &\approx 66.67\ cm \end{aligned}}$$

Tema 5

a. Resolver:

$$\int \frac{4x^5}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Resolveremos la integral utilizando una sustitución, planteamos nuestra sustitución.	$u = x^3 + 2$ $du = 3x^2dx \quad \rightarrow \quad \frac{du}{3} = x^2dx$
2	Reordenamos nuestra integral y hacemos las sustituciones correspondientes.	$4\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^3+2}}x^2dx$ $x^3 = u - 2$ $4\int \frac{u-2}{\sqrt[4]{u}} \cdot \frac{du}{3}$ $\frac{4}{3}\int \frac{u-2}{u^{1/4}}du$ $\frac{4}{3}\int \left(u^{3/4} - 2u^{-1/4}\right)du$
3	Resolvemos la integral.	$\frac{4}{3} \cdot \left[\frac{u^{3/4+1}}{3/4+1} - 2 \cdot \frac{u^{-1/4+1}}{-1/4+1}\right]$ $\frac{4}{3} \cdot \left[\frac{u^{7/4}}{7/4} - 2 \cdot \frac{u^{3/4}}{3/4}\right]$ $\frac{4}{3} \cdot \left[\frac{4}{7} \cdot u^{1/4} - \frac{8}{3} \cdot u^{3/4}\right]$ $\frac{16}{21} \cdot u^{1/4} - \frac{32}{9} \cdot u^{3/4} + c$
4	Volvemos a la variable original.	$\int \frac{4x^5}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx = \frac{16}{21} \cdot (x^3+2)^{1/4} - \frac{32}{9} \cdot (x^3+2)^{3/4} + c$

b. Resolver:

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{4\mathrm{t}^5 \tan t^3}{\sqrt[4]{t^3+2}}\,dt$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Del teorema fundamental del cálculo sabemos.	$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f\big(b(x)\big)\cdot b'(x) - f\big(a(x)\big)\cdot a'(x)$$
2	Aplicamos el teorema a nuestra integral y obtenemos.	$$f(t) = \frac{4t^5 \tan t^3}{\sqrt[4]{t^3+2}}$$ $$a(x) = 3$$ $$b(x) = x$$ $$\frac{4x^5 \tan x^3}{\sqrt[4]{x^3+2}}\cdot\frac{d}{dx}(x) - \frac{4\cdot 3^5 \tan 3^3}{\sqrt[4]{3^3+2}}\cdot\frac{d}{dx}(3)$$ $$\frac{4x^5 \tan x^3}{\sqrt[4]{x^3+2}}$$
3	Solución	$$\int_3^x \frac{4t^5 \tan t^3}{\sqrt[4]{t^3+2}}\,dt = \frac{4x^5 \tan x^3}{\sqrt[4]{x^3+2}}$$

Tema 6

a. Resolver:

$$\lim_{x \to 0} \frac{8e^x - 8 - 8x}{6x^2}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Si evaluamos el límite nos damos cuenta que conduce a un valor indeterminado.	$\lim_{x \to 0} \frac{8e^x - 8 - 8x}{6x^2} = \frac{0}{0}$
2	El resultado anterior, nos permite aplicar el teorema de L'Hopital a nuestro límite.	$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(8e^x - 8 - 8x)}{\frac{d}{dx}(6x^2)}$ $\lim_{x \to 0} \frac{8e^x - 8}{12x} = \frac{0}{0}$
3	Evaluando de nuevo el límite obtenemos de nuevo un valor indeterminado. Por lo que podemos aplicar el teorema de L'Hopital de nuevo.	$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(8e^x - 8)}{\frac{d}{dx}(12x)}$ $\lim_{x \to 0} \frac{8e^x}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{8e^x - 8 - 8x}{6x^2} = \frac{2}{3}}$$

b. Resolver:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Evaluando el límite, obtenemos un valor indeterminado.	$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \infty^0$
2	Para poder aplicar la regla de L'Hopital, antes debemos utilizar la propiedad del logaritmo de un límite.	$y = \lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ $\ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{1/x}\right)$ $\ln y = \lim_{x\to\infty} \ln x^{1/x}$ $\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \ln x$ $\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$
3	Procedemos a aplicar el teorema de L'Hopital.	$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x)}$ $\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$ $\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
4	Hallamos el límite original.	$e^{\ln y} = y = e^0 = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1}$$