UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-2-V-2-00-2019_M

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**14 de Octubre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Inga Silvia Hurtarte**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Manuel García**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 2**

Temario MB 14/10/2019

MATEMATICA BASICA 2 **SEGUNDO EXAMEN PARCIAL**

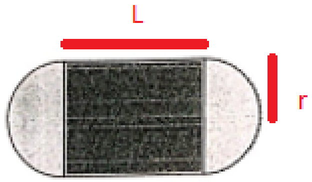
Tema		Valor
1	La pista de carreras que se muestra en la figura, consta de dos rectas paralelas y dos semicírculos en los extremos. La longitud de la pista debe medir dos kilómetros. Encuentre el diseño de la pista, de tal manera que el área rectangular encerrado en la pista, sea máximo. 	15
2	Sea $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$ 1. Halle la linealización de la función en $a = 0$. 2. Utilice, la linealización anterior aproxime el valor de $\sqrt[3]{1.06}$	20
3	Trace la gráfica de una función continua que cumple con las siguientes condiciones $f(0) = 2;\quad f'(2) = 0\;\; f'(6)\,\nexists;\quad f''(-1) = 0;\; f''(0) = 0$ $f'(x) > 0\; en\; (-\infty, 2);\quad f'(x) < 0\; en\; (2, 6);\quad f'(x) = 1\; en\; (6, +\infty);$ $f''(x) < 0\; en\; (-\infty, -1)\;\; (0, 6);\qquad f''(x) > 0\; en\; (-1, 0)$	15
4	Calcule la operación indicada: 1. $\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{2/x}$ 2. Encuentre y' por derivación implícita: a. $2(x^2 + y^2)^2 = sen\,(x^2 - y^2)$ 3. Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de la función: $y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$	30
5	Un tanque semi-esférico con el diámetro en la parte superior, de 10 pies de radio. Contiene agua, y está siendo vaciado. De tal forma que en cierto instante la profundidad del agua es de 5 pies y está disminuyendo a razón de 0.25 pies por segundo. ¿Con que rapidez disminuye el área de la superficie del agua en ese instante?	20

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

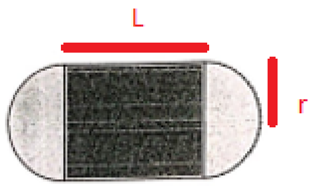
Tema 1 (15 puntos)

a.

La pista de carreras que se muestra en la figura, consta de dos rectas paralelas y dos semicírculos en los extremos. La longitud de la pista debe medir dos kilómetros. Encuentre el diseño de la pista, de tal manera que el área rectangular encerrado en la pista, sea máximo.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando la siguiente nomenclatura se resolverá el ejercicio	
2.	Dado que el perímetro de la pista es de 2km, determinamos la ecuación que brindará el perímetro de la figura (P).	$P = 2L + 2\pi r$
3.	Determinando el área rectangular de la pista a optimizar.	$A = L*2r$
4.	Despejando la variable L de la función P, para sustituirla en la función del área.	$P = 2L + 2\pi r$ $2 = 2L + 2\pi r$ $1=L+ \pi r$ $L= 1 - \pi r$ $A = L*2r$ $A = (1 - \pi r)*2r$ $A= 2r - 2\pi r^2$
5.	Derivamos la función del área y la igualamos a 0, para conocer el valor de r que determina el valor del área máxima del rectángulo de la pista.	$A= 2r - 2\pi r^2$ $A'= 2 - 4\pi r$ $0=2 - 4\pi r$ $\frac{1}{2\pi}=r$
6.	Sustituyendo el valor de r en la función del perímetro para encontrar el valor de L.	$2 = 2L + 2\pi(\frac{1}{2\pi})$ $2=2L+1$ $L=\frac{1}{2}$
7.	Sustituyendo el valor de r y L para encontrar el área rectangular máxima.	$A = (\frac{1}{2})*2(\frac{1}{2\pi})$ $A=\frac{1}{2\pi}\ km^2$

R./ Para que la pista cuente con un área máxima en la sección rectangular: L=0.5 km y r = $\frac{1}{2\pi}$ km



Tema 2 (20 puntos)
Sea f(x)= $\sqrt[3]{(1+3x)}$

a. Halle la linealización de la función en a=0.
b. Utilice, la linealización anterior aproxime el valor de $\sqrt[3]{1.06}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la derivada de la función f(x)=$\sqrt[3]{1+3x}$	f(x)=$\sqrt[3]{1+3x}$ f'(x)=$(1+3x)^{\frac{-2}{3}}$
2.	Determinando la linealización de la función f(x), con base a la función L(x)=f'(a)(x-a) + f(a). En donde, a=0	L(x)=f'(a)(x-a) + f(a) f(0)=$\sqrt[3]{1+3*0}$=1 f'(0)=$(1+3*0)^{\frac{-2}{3}}=1$ L(x)=1*(x-0) + 1 L(x)=x + 1
3.	Determinando el valor de $\sqrt[3]{1.06}$ utilizando la linealización anterior.	1+3x=1.06 3x=0.06 X=0.02
4.	Sustituyendo x=0.02 en la linealización anterior para determinar el valor aproximado de $\sqrt[3]{1.06}$	L(x)=x + 1 L(0.02)=0.02 + 1 L(0.02)= 1.02

R./ a. La linealización de la función f(x)=$\sqrt[3]{1+3x}$ es L(x)=x + 1
b. El valor de $\sqrt[3]{1.06}$, utilizando la linealización anterior es 1.02

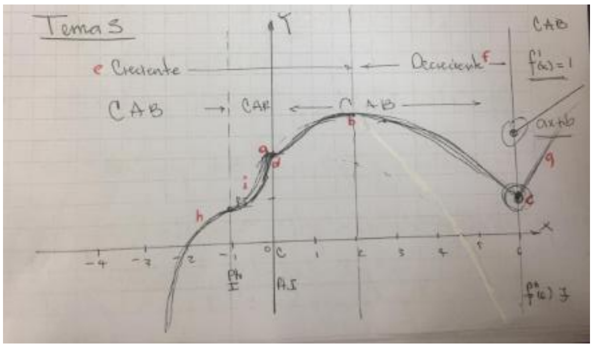
Tema 3: (15 puntos)

Trace la gráfica de una función continua que cumple con las siguientes condiciones

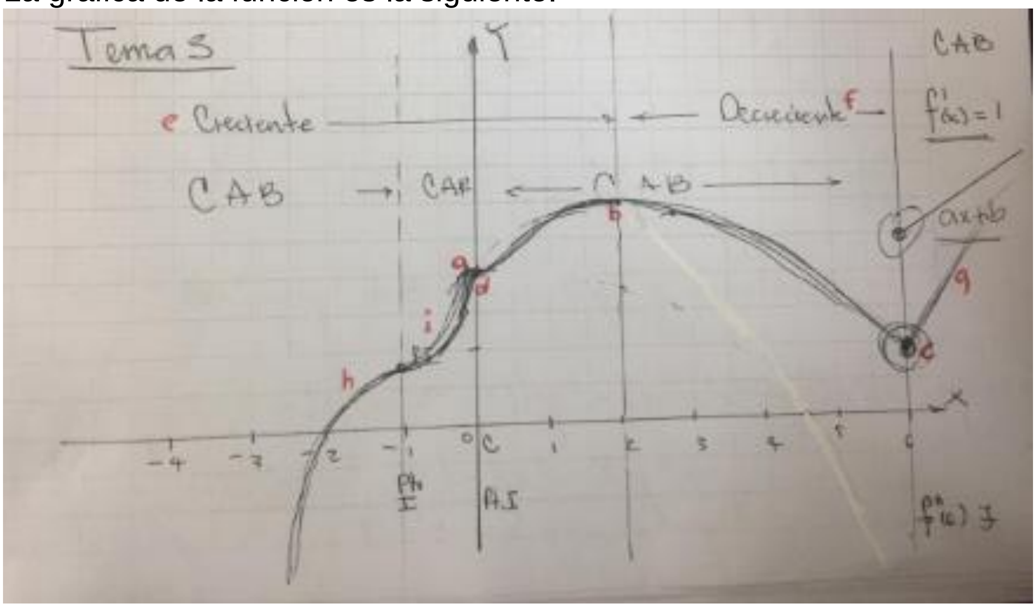
$$f(0) = 2; \quad f'(2) = 0 \;\; f'(6) \nexists; \;\; f''(-1) = 0; \; f''(0) = 0$$

$$f'(x) > 0 \; en \; (-\infty, 2); \quad f'(x) < 0 \; en \; (2, 6); \;\; f'(x) = 1 \; en \; (\,6, +\infty);$$

$$f''(x) < 0 \; en \; (-\infty, -1) \;\; (0\,, 6); \quad f''(x) > 0 \; en \; (-1, 0)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Dadas la condiciones anteriores, la gráfica es la siguiente. Condiciones: a. f(0)=2 b. f'(2)=0 c. f'(6) ∉ d. f''(0)=0 e. f'(x)>0 en (-∞, 2) f. f'(x)<0 en (2,6) g. f'(x)=1 en (6, +∞) h. f''(x)<0 en (-∞, -1) (0,6) i. f''(x)>0 en (-1,0)	

R./
a) La gráfica de la función es la siguiente.



Tema 4: (30 puntos)
Calcule la operación indicada

1. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{\frac{2}{x}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Evaluando el límite para determinar si existe solución.	$\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{\frac{2}{x}} = \infty$
2.	Aplicando logaritmo en ambos lados y evaluando el límite.	$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} * \ln(e^x + x)$
3.	Aplicando L'Hopital en la función para determinar el límite.	$\ln y = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{1}1$ $\ln y = 2\lim_{x\to\infty} \frac{(e^x+1)}{e^x+x} = \frac{\infty}{\infty}$
4.	Aplicando L'Hopital en la función para determinar el límite por segunda ocasión.	$\ln y = 2\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{\infty}{\infty}$
5.	Aplicando L'Hopital en la función para determinar el límite por tercera ocasión.	$\ln y = 2\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$
6.	Aplicando exponencial en ambos lados de la ecuación para determinar el valor del límite	$e^{\ln y} = e^2$ $y = e^2$

1. R/ El límite $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{\frac{2}{x}}$ es igual a e^2

2. Encuentre y’ por derivación implícita. $2(x^2+y^2)^2 = sen(x^2+y^2)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Aplicando $\frac{d}{dx}$ en ambos lados de la ecuación y realizando la derivación implícita.	$\frac{d}{dx}(2(x^2+y^2)^2) = \frac{d}{dx}(sen(x^2+y^2))$ $4(x^2+y^2)(2x+2yy') = cos(x^2+y^2)(2x+2yy')$
2.	Simplificando la expresión para agrupar y’ para la solución del problema.	$4(x^2+y^2)(2x+2yy') = cos(x^2+y^2)(2x+2yy')$ $(4x^2+4y^2)(8x+8yy') = 2xcos(x^2+y^2)+2yy'cos(x^2+y^2)$ $32x^3+32x^2yy'+32y^2x+32y^3y' = 2xcos(x^2+y^2)+2yy'cos(x^2+y^2)$ $32x^3+32y^2x-2xcos(x^2+y^2) = y'(-32x^2y-32y^3+2ycos(x^2+y^2))$ $y' = \frac{32x^3+32y^2x-2xcos(x^2+y^2)}{-32x^2y-32y^3+2ycos(x^2+y^2)}$

R/. La derivada implicita de y’ de $2(x^2+y^2)^2 = sen(x^2+y^2)$ es

$$y' = \frac{32x^3+32y^2x-2xcos(x^2+y^2)}{-32x^2y-32y^3+2ycos(x^2+y^2)}$$

3. Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de la función:

$$y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$$

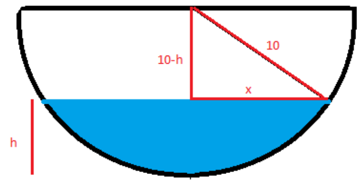
No.	Explicación	Operatoria
1.	Aplicando el logaritmo natural en la expresión dada.	$y = \sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{2/3}$ $ln\,y = \ln(\sqrt{x}e^{x^2+x}(x+1)^{\frac{2}{3}})$
2.	Simplificando las expresiones dadas por los logaritmos.	$ln\,y = \ln(\sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{\frac{2}{3}})$ $ln\,y = \frac{1}{2}lnx + (x^2-x) + \frac{2}{3}ln(x+1)$
3.	Aplicando la derivación implícita en ambos lados de la ecuación.	$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + 2x - 1 + \frac{2}{3(x+1)}$
4.	Despejando y’ y sustituyendo y en la derivada.	$y' = y(\frac{1}{2x} + 2x - 1 + \frac{2}{3(x+1)})$ $y' = (\sqrt{x}e^{x^2-x}(x+1)^{\frac{2}{3}})(\frac{1}{2x} + 2x - 1 + \frac{2}{3(x+1)})$

R/ La derivada de $y = \sqrt{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x^2-x}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\frac{2}{3}}$ es

$$\boldsymbol{y'} = (\sqrt{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x^2-x}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\frac{2}{3}})(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})})$$

Tema 5: (20 puntos)

Un tanque semi-esférico con el diámetro en la parte superior, de 10 pies de radio. Contiene agua, y está siendo vaciado. De tal forma que en cierto instante la profundidad del agua es de 5 pies y está disminuyendo a razón de 0.25 pies por segundo. ¿Con que rapidez disminuye el área de la superficie del agua en ese instante?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando dicha notación para la resolución del problema.	
2.	Determinando el área del espejo de agua del tanque. Y su derivada para el calculo de las razones de cambio.	$A = \pi x^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dx}{dt}$
3.	Determinando la razón de cambio de $\frac{dx}{dt}$ por medio de Pitágoras con base al cambio de $\frac{dh}{dt}$, utilizando h=5 y $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{pie}{s}$.	$x^2 + (10-h)^2 = 100$ $x^2 = 100 - (100 - 20h + h^2)$ $x^2 = -20h + h^2$
4.	Sustituyendo x^2 en la función del área para determinar $\frac{dA}{dt}$.	$A = -20h + h^2$ $\frac{dA}{dt} = \pi(20-2h)\frac{dh}{dt}$
5.	Sustituyendo h=5 y $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{pie}{s}$, para determinar $\frac{dA}{dt}$	$\frac{dA}{dt} = \pi(20-2h)\frac{dh}{dt}$ $\frac{dA}{dt} = \pi(20-2(5))(-1/4) = -\frac{5\pi}{2}\frac{pie^2}{s}$

R/. El cambio del área del espejo de agua con respecto al tiempo es:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{5\pi}{2}\frac{pie^2}{s}$$