UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

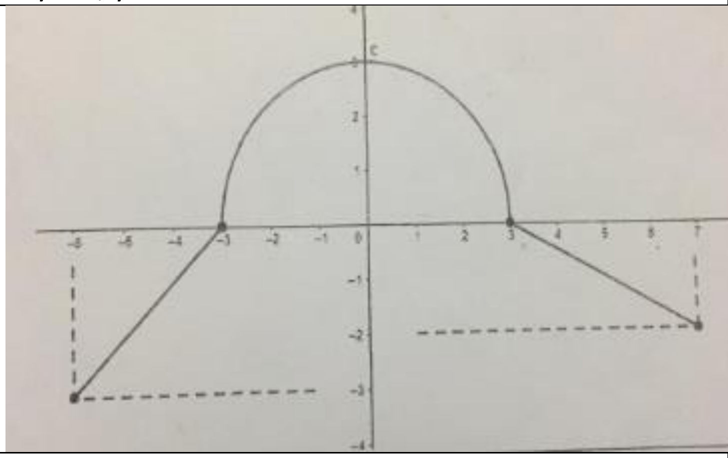
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-3-V-2-00-2019_M

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Noviembre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Inga Silvia Hurtarte**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Manuel García**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

NOVIEMBRE 2019

MATEMATICA BASICA 2 **TERCER EXAMEN PARCIAL**

Tema		Valor
1	Utilice el límite al infinito de la suma de Riemann para calcular el valor debajo de la curva $f(x)=2x-x^2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$, exprésela como una integral definida y verifique por integración directa	15
2	Resuelva las operaciones indicadas, dejando constancia de cada uno de los pasos realizados en la ejecución. a) $\int x^2\sqrt{1+x}\ dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta + sen\Theta\ tan^2\Theta}{sec^2\Theta} d\Theta$ Determine la derivada de la función: b) $\int_{2x}^{3x+1} sen(t^4)\ dt$ $d)\int \frac{x}{x^4+4} dx$	40
3	Dibuje la región encerrada por las curvas dadas, decida si integra respecto de x o de y. Trace un rectángulo típico e indique su altura y ancho. Determine el área de la región. $y=x^2$, $y= 4x- x^2$	15
4	La gráfica de la función f(x) esta formada por un semicírculo y segmentos de recta. Evalué la integral acotada por el eje de las x, en términos de áreas de figuras geométricas. $\int_{-6}^{7} f(x)$ 	10
5	Encuentre el volumen del solido obtenido al hacer girar la región acotada por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. a) Trace la gráfica de la región. b) Plantee la integral c) Resuelva la integral $X = 1-y^2$, $x=2y-y$ alrededor de $x=1$	20

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (15 puntos)

Utilice el límite al infinito de la suma de Riemann para calcular el valor debajo de la curva $f(x)=2x-x^2$ en el intervalo $0 \le x \le 2$, exprésela como una integral definida y verifique por integración directa.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando el límite infinito de la sumatoria de Riemann para encontrar el área bajo la curva de la función $f(x)=2x-x^2$.	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(xi) * \Delta x$
2.	Determinando el valor de $\Delta x\ y\ xi$.	$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ $xi = a + i\Delta x$ $xi = 0 + i\frac{2}{n}$
3.	Sustituyendo en la sumatoria los valores de $\Delta x\ y\ xi$, y resolviendo la sumatoria.	$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{2i}{n}) * \frac{2}{n}$ $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\left(2 * \frac{2i}{n}\right) - (\frac{2i}{n})^2) * \frac{2}{n}$ $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i}{n^2}\right) - \left(\frac{8i^2}{n^3}\right)$ $A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$
4.	Sustituyendo $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$A = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^2} * \frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $A = 4 * \lim_{n\to\infty} (\frac{n(n+1)}{n^2} - \frac{2}{6} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3})$ $A = 4 * \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$
5.	Verificando la integral por integración directa	$\int_0^2 (2x - x^2)dx = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

R./ El área bajo la curva de la función $f(x)=2x-x^2$ en el intervalo 0 <= x <= 2 es.

$$A = \frac{4}{3}$$

Tema 2 (40 puntos)

Resuelva las operaciones indicadas, dejando constancia de cada uno de los pasos realizados en la ejecución.

a. $\int x^2\sqrt{1+x}\ dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando el método por sustitución.	$u = 1 + x$ $x = u - 1$ $\mathrm{d}x = du$ $x^2 = (u-1)^2$
2.	Sustituyendo el valor de u en la integral original.	$\int x^2\sqrt{1+x}\ dx = \int (u-1)^2(u^{1/2})du$
3.	Realizando la integral.	$\int (u-1)^2\left(u^{\frac{1}{2}}\right)du$ $\int (u^2-2u+1)\left(u^{\frac{1}{2}}\right)du$ $\int \left(u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du$ $\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$
4.	Sustituyendo u=1+x	$\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$ $\frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+c$

R./

$$\int x^2\sqrt{1+x}\ dx = \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+c$$

b. $\int_{2x}^{3x+1} sen(t^4)\ dt$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando los nuevos límites de integración para poder determinar la derivada de la función.	$\int_{2x}^{3x+1} sen(t^4)\ dt$ $\int_{2x}^{0} sen(t^4)\ dt + \int_{0}^{3x+1} sen(t^4)\ dt$ $-\int_{0}^{2x} sen(t^4)\ dt + \int_{0}^{3x+1} sen(t^4)\ dt$
2.	Determinando la integral $-\int_0^{2x} sen(t^4)dt$, por el método de sustitución	$u = 2x$ $du = 2\ dx$ $\frac{du}{dx} = 2$

3.	Determinando la derivada de la expresión.	$\frac{d}{du}\left(-\int_0^u (sen(t^4)dt)\left(\frac{du}{dt}\right)\right) = -sen(u^4)(2)$ $\frac{d}{dx}\left(-\int_0^{2x} (sen(t^4)dt)\right) = -sen((2x)^4)(2)$
4.	Determinando la integral $\int_0^{3x+1} sen(t^4)dt$, por el método de sustitución	$u = 3x + 1$ $du = 3\,dx$ $\frac{du}{dx} = 3$
5.	Determinando la derivada de la expresión.	$\frac{d}{du}\left(-\int_0^u (sen(t^4)dt)\left(\frac{du}{dt}\right)\right) = sen((3x+1)^4)(3)$
6.	Determinando el valor de la derivada.	$\int_{2x}^{3x+1} sen(t^4)\,dt = sen\left((3x+1)^4\right)(3) - sen\left((2x)^4\right)(2)$

R./

$$\int_{2x}^{3x+1} sen(t^4)\,dt = sen\left((3x+1)^4\right)(3) - sen\left((2x)^4\right)(2)$$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta + sen\Theta\, tan^2\Theta}{sec^2\Theta}\, d\Theta$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Agrupando la identidad $sen\Theta$ del numerador de la expresión.	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta + sen\Theta\, tan^2\Theta}{sec^2\Theta}\, d\Theta$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta(1 + tan^2\Theta)}{sec^2\Theta}\, d\Theta$

2.	Utilizando la identidad trigonométrica $1+tan^2\Theta = sec^2\Theta$ y sustituyéndola en la integral.	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta(1+tan^2\Theta)}{sec^2\Theta} d\Theta$ $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta sec^2\Theta}{sec^2\Theta} d\Theta$ $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\Theta\, d\Theta$
3.	Realizando la integral directa y evaluando la integral.	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\Theta\, d\Theta = -cos\Theta \,\Big\|_0^{\pi/3}$ $= -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

R./

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\Theta + sen\Theta\, tan^2\Theta}{sec^2\Theta} d\Theta = \frac{1}{2}$$

d. $\int \frac{x}{x^4+4} dx$

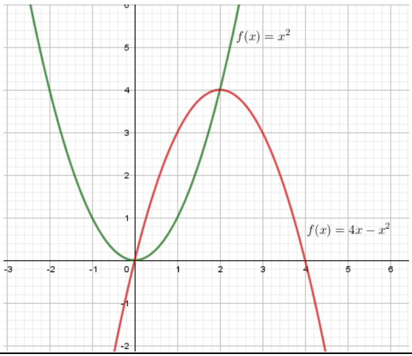
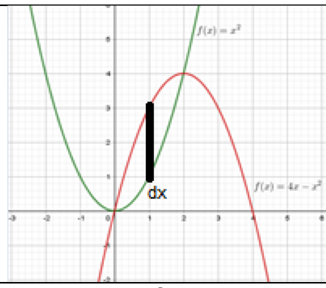
No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando el método de sustitución para la resolución de la integral.	$u = x^2$ $du = 2x\,dx$ $\frac{du}{2} = x\,dx$
2.	Sustituyendo el valor de u y realizando la integral.	$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right) + c$
3.	Sustituyendo u = x^2, para determinar el valor de la integral.	$\int \frac{x}{x^4+4} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) + c$

R./

$$\int \frac{x}{x^4+4} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) + c$$

Tema 3: (15 puntos)
Dibuje la región encerrada por las curvas dadas, decida si integra respecto de x o de y. Trace un rectángulo típico e indique su altura y ancho. Determine el área de la región.

$y=x^2$, $y= 4x- x^2$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la región limitada por las funciones $y=x^2$ y la función $y=4x-x^2$, a través de su gráfica.	
2.	Determinando los puntos de intersección de las dos funciones.	$y1 = y2$ $x^2 = 4x - x^2$ $2x^2 - 4x = 0$ $(2x-4)x = 0$ $x1 = 0 \quad x2 = 2$
3.	Determinando el diferencial del área en la gráfica de la función.	
4.	Determinando el área entre las curvas con la altura de la región y su diferencial respecto de x.	$A = \int_a^b h(x)dx$ $A = \int_0^2 \left(4x - x^2 - (x^2)\right) dx$ $A = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx$
5.	Resolviendo la integral para determinar el valor del área entre las curvas.	$A = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) dx$ $A = 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \mid \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$ $A = \frac{8}{3}$

R./ El área entre las funciones es de

$$A = A = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) dx \ = \frac{8}{3}$$

Tema 4: (10 puntos)
La gráfica de la función f(x) esta formada por un semicírculo y segmentos de recta. Evalué la integral acotada por el eje de las x, en términos de áreas de figuras geométricas.

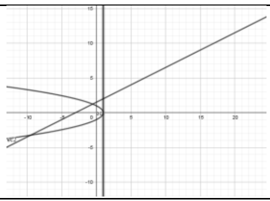
$$\int_{-6}^{7} f(x)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando los intervalos de integración para la función por partes presentada en la gráfica.	$\int_{-6}^{7} f(x) = \int_{-6}^{-3} f(x) + \int_{-3}^{3} f(x) + \int_{3}^{7} f(x)$
2.	Para el intervalo de la función de -6<= x<=-3, Se determina el área de la función con el área de la figura geométrica de un triángulo.	$A1 = \int_{-6}^{-3} f(x) = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$
3.	Para el intervalo de la función de -3<=x<=3, Se determina el área de la función con el área de la figura geométrica de un semicírculo.	$A2 = \int_{-3}^{3} f(x) = \frac{\pi}{2}(2)^2 = \frac{9}{2}\pi$
4.	Para el intervalo de la función de 3<= x<=7, Se determina el área de la función con el área de la figura geométrica de un triángulo.	$A3 = \int_{3}^{7} f(x) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$
5.	Determinamos el área total de la función con la sumatoria de las áreas encontradas.	$A = A1 + A2 + A3$ $A = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\pi - 4 = 5.64$

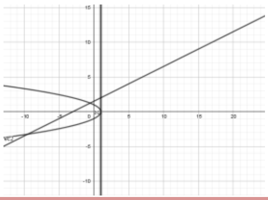
R/ El área entre la función por partes es de
$$\boldsymbol{A = 5.64}\ \mathit{Unidades\ cuadradas}$$

Tema 5: (20 puntos)
Encuentre el volumen del solido obtenido al hacer girar la región acotada por las curvas dadas, alrededor de la recta especificada. X = 1-y^2 , x=2y-y alrededor de x=1

a. Trace la gráfica de la región.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Graficando las funciones $x = 1 - y^2$, x=2y-2. Haciéndolas girar alrededor de x=1	

R/.La gráfica de la región a rotar es



b. Plantee la integral del volumen

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando el radio mayor y el radio menor de rotación.	$R = 1 - (1 - y^2) = y^2$ $r1 = 1 - (2y - 2) = 3 - 2y$
2	Determinando la integral del volumen.	$V = \pi \int_a^b (r^2 - R^2)dy$
3.	Determinando los puntos de intersección de las dos funciones para determinar su intervalo de integración.	$x1 = x2$ $1 - y^2 = 2y - 2$ $y^2 + 2y - 3 = 0$ $y1 = 1 \quad y2 = -3$
4.	Determinando la integral del solido en revolución	$V = \pi \int_{-3}^{1} ((3 - 2y)^2 - (y^2)^2)dy$

R/.La integral del volumen es

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{-3}^{1} ((3 - 2y)^2 - (y^2)^2)dy}$$

c. Resuelva la integral.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Desarrollando él algebra dentro de la integral.	$V = \pi \int_{-3}^{1} ((3 - 2y)^2 - (y^2)^2)dy$ $V = \pi \int_{-3}^{1} ((9 - 12y + 4y^2) - y^4)dy$ $V = \int_{-3}^{1} (-y^4 + 4y^2 - 12y + 9)dy$
2	Desarrollando la integral y evaluando la integral.	$V = \int_{-3}^{1} (-y^4 + 4y^2 - 12y + 9)dy$

		$V = -\frac{y^5}{5} + \frac{4}{3}y^3 - 6y^2 + 9y \,\Big|_{-3}^{1}$ $V = 227.87$

R/. El volúmen del sólido es de

$$\boldsymbol{V = 227.87}$$