UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-4-V-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Básica 2**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**18 de noviembre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Edwin Chamalé**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Edwin Chamalé**
COORDINADOR:	**Ing. Renato Ponciano**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Matemática Básica 2
Examen Final
18/11/2019

EXAMEN FINAL

TEMARIO FX

Tema 1 (30 puntos)

a) Evalúe el límite trigonométrico: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(\tan 2x)^3}$

b) Si $h(x) = f[(\sin x)g(x)]$, encuentre $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, si $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $f'(1) = 2$ y $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$.

c) Evalúe $\int_{-8}^{3} \sqrt{|x| + 1}\ dx$

Tema 2 (20puntos)

La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo disminuye a razón de $\frac{\pi}{36}$ rad/s. Si la longitud de la hipotenusa es de 40 cm y es constante, calcular con qué rapidez cambia el área cuando la medida del ángulo agudo es $\frac{\pi}{6}$.

Tema 3 (20 puntos)

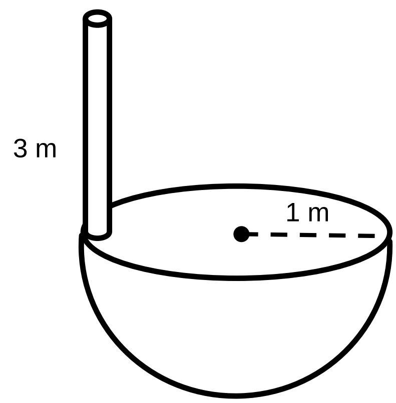
Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ cuya pendiente sea mínima.

Tema 4 (20 puntos)

Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar la región acotada por la curva $x = \sqrt{y}$ y las rectas $y = 1, x = 2$, cuando gira alrededor de la recta $y = -3$. Usar método de cascarones cilíndricos.

Tema 5 (10 puntos)

Calcular el trabajo necesario para bombear el agua por un punto de descarga que se encuentra a 3 metros de la parte superior de un tanque semiesférico (ver la figura). El tanque tiene un radio de 1 metro, al inicio se encuentra lleno de agua, al final se requiere quede con agua a un nivel de profundidad de 0.5 metros.



Universidad de San Carlos de Guatemala	**Matemática Básica 2**
Facultad de Ingeniería	**Examen Final**
Departamento de Matemática	**18/11/2019**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

a) Evalúe el límite trigonométrico: $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(\tan 2x)^3}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero se evalúa el límite para ver qué forma se obtiene, tomando en cuenta que este límite es trigonométrico y x tiende a 0	$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(\tan 2x)^3} = \frac{0^3}{(\tan 2 * 0)^3}$ $= \frac{0}{0}$
2.	Se puede observar que el limite da como resultado una forma indeterminada, pudiéndose aplicar la regla de L'Hopital, pero también se puede observar que se puede llevar a una forma conveniente de $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, mediante identidades trigonométricas	
3.	Aplicando identidades trigonométricas a la expresión para poder llevarla a la forma conveniente de $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, se usará la identidad de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(\frac{\sin 2x}{\cos 2x})^3}$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\frac{sin^3 2x}{cos^3 2x}}$
4.	Aplicando la regla de extremos y medios al límite	$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 * cos^3 2x}{sin^3 2x}$

5.	Se puede observar que casi se llega a la forma que se necesita $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, solo se debe manipular algebraicamente la expresión, multiplicándola por un 1 disfrazado $\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$	$\lim_{x\to 0}\frac{cos^3 2x}{\frac{sin^3 2x}{x^3}}$
6.	Se puede observar que en el denominador esta por acercarse a la forma que deseamos y que el denominador se puede reescribir de la siguiente forma	$\lim_{x\to 0}\frac{cos^3 2x}{\frac{\sin 2x*\sin 2x*\sin 2x}{x*x*x}}$
7.	Se necesita que cada $\sin 2x$ tenga un denominador de $2x$ para poder aplicar la forma que necesitamos, descrita en el paso 2, para eso se hace otra manipulación algebraica que no afecte a la expresión	$\lim_{x\to 0}\frac{cos^3 2x}{\frac{2*2*2*\sin 2x*\sin 2x*\sin 2x}{2*2*2*x*x*x}}$
8.	Reescribiendo el limite se observa que hemos llegado a la forma que se necesita para poder evaluar el limite trigonométrico	$\lim_{x\to 0}\frac{cos^3 2x}{\frac{8*\sin 2x*\sin 2x*\sin 2x}{2x*2x*2x}}$
9.	Aplicando las leyes de los limites	$\frac{\lim_{x\to 0} cos^3 2x}{\lim_{x\to 0}\frac{8*\sin 2x*\sin 2x*\sin 2x}{2x*2x*2x}}$
10.	Evaluando los límites	$\frac{1^3}{8*1*1*1}$ $\frac{1}{8}$

R// $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(\tan 2x)^3} = \frac{1}{8}$

b) Si $h(x) = f[(\sin x)g(x)]$, encuentre $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, si $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2,\ f'(1) = 2$ y $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se puede observar que lo que se pide acá es una derivación implícita, ya que se tiene diferentes funciones, pero todas dependen de X, tomando en cuenta que en la función F se encuentra un producto de funciones por lo que se deberá hacer uso de la regla de la cadena	
2.	Se procede a realizar la derivación implícita de la ecuación, respecto de X	$h'(x) = f'[(\sin x)g(x)] * (\cos x * g(x) + g'(x) * \sin x)$
3.	Como el problema está pidiendo encontrar $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ se necesita despejarla de la ecuación $g'(x)$	$h'(x) = f'[\sin x * g(x)] * \cos x * g(x) + f'[\sin x * g(x)] * g'(x) * \sin x$
4.	Despejando $g'(x)$	$\frac{h'(x) - f'[\sin x * g(x)] * \cos x * g(x)}{f'[\sin x * g(x)] * \sin x} = g'(x)$
5.	Ahora que se encuentra despejada $g'(x)$ se procede a evaluar $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{h'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left[\sin\frac{\pi}{6} * g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] * \cos\frac{\pi}{6} * g\left(\frac{\pi}{6}\right)}{f'\left[\sin\frac{\pi}{6} * g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] * \sin\frac{\pi}{6}} = g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$
6.	Sabiendo que los valores de si $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, $f'(1) = 2$ y $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, se procede a evaluar dichos valores en la ecuación	$\frac{4 - f'\left[\frac{1}{2} * 2\right] * \frac{\sqrt{3}}{2} * 2}{f'\left[\frac{1}{2} * 2\right] * \frac{1}{2}} = g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{4 - f'[1] * \sqrt{3}}{f'[1] * \frac{1}{2}} = g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

		$\frac{4-2*\sqrt{3}}{2*\frac{1}{2}}=g'(\frac{\pi}{6})$ $\frac{4-2\sqrt{3}}{1}=g'(\frac{\pi}{6})$ $4-2\sqrt{3}=g'(\frac{\pi}{6})$

R// $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=4-2\sqrt{3}$

c) Evalúe$\int_{-8}^{3} \sqrt{|x|+1}\ dx$

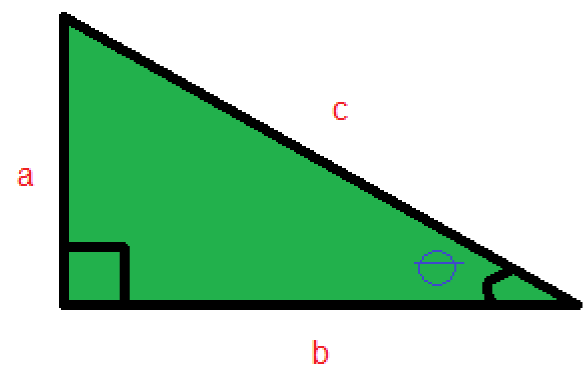
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se puede observar que dentro de la raíz se encuentra la variable x en valor absoluto, por tanto para valores de $x > 0$ será $+x$ y para valores de $x \leq 0$ será $-x$, por tanto, dicha integral se termina separando en la sumatoria de dos integrales como se ve a continuación	$\int_{-8}^{3} \sqrt{\lvert x\rvert+1}dx = \int_{-8}^{0} \sqrt{-x+1}dx + \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}dx$
2.	Se procede a realizar la primera integral, realizando una sustitución de U para poder integrar, luego se volverá a la forma normal sin cambiar los límites de integración (si es de su preferencia, puede realizar dicha sustitución y cambiar sus límites de integración)	$\int_{-8}^{0} \sqrt{-x+1}dx$ $-x+1=U$ $-dx=dU$ $dx=-dU$ $-\int_{c}^{d} U^{1/2}dU$ $-\frac{2}{3}\left[U^{3/2}\right]\Big\{_{c}^{d}$ $-\frac{2}{3}\left[(-x+1)^{3/2}\right]\Big\{_{-8}^{0}$ $-\frac{2}{3}\left[(-(0)+1)^{3/2}-(-(-8)+1)^{3/2}\right]$ $-\frac{2}{3}\left[(1)^{3/2}-(9)^{3/2}\right]$ $-\frac{2}{3}[1-27]$ $-\frac{2}{3}[-26]$ $\frac{52}{3}$
3.	Se procede a realizar la segunda integral, realizando una sustitución de U para poder	

	integrar, luego se volverá a la forma normal sin cambiar los límites de integración (si es de su preferencia, puede realizar dicha sustitución y cambiar sus límites de integración)	$\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$ $x+1=U$ $dx=dU$ $\int_c^d U^{1/2}dU$ $\frac{2}{3}\left[U^{3/2}\right]\begin{cases}d\\c\end{cases}$ $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2}\right]\begin{cases}3\\0\end{cases}$ $\frac{2}{3}\left[((3)+1)^{3/2}-((0)+1)^{3/2}\right]$ $\frac{2}{3}\left[(4)^{3/2}-(1)^{3/2}\right]$ $\frac{2}{3}[8-1]$ $\frac{2}{3}[7]$ $\frac{14}{3}$
4.	Se procede a sumar el resultado de las dos integrales para poder tener el resultado total de la integral	$\int_{-8}^3 \sqrt{\lvert x\rvert+1}dx=\frac{52}{3}+\frac{14}{3}$ $\int_{-8}^3 \sqrt{\lvert x\rvert+1}dx=\frac{66}{3}$ $\int_{-8}^3 \sqrt{\lvert x\rvert+1}dx=22$

R// $\int_{-8}^3 \sqrt{|x|+1}dx=22$

Tema 2: 20 puntos

La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo disminuye a razón de $\frac{\pi}{36}$ rad/s. Si la longitud de la hipotenusa es de 40 cm y es constante, calcular con qué rapidez cambia el área cuando la medida del ángulo agudo es $\frac{\pi}{6}$.



No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a realizar un dibujo del problema y a recolectar la mayor cantidad de datos posibles, para poder tener una visión más clara de lo que se está pidiendo	$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{36} rad/s$ $c = 40cm$ $\frac{dA}{dt} = ?\, para\ \theta = \frac{\pi}{6} rad$
2.	Sabiendo ahora que lo que se desea conocer es a que razón va disminuyendo el área del triángulo conforme va disminuyendo el ángulo θ se procede a encontrar una ecuación que modele el área de un triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$ $A = \frac{1}{2}ba$
3.	Ahora que se tiene una ecuación que modele el área de un triángulo, se debe buscar la forma de relacionar el ángulo que está disminuyendo a una razón, para así poder obtener la	$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $c\sin\theta = a$

	disminución del área en función de la disminución del ángulo.	$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$ $$c\cos\theta = b$$
4.	Ahora que se tiene una relación del ángulo con las dimensiones del triángulo para poder calcular el área, se sustituyen dichos valores	$$A(\theta) = \frac{1}{2}(c\cos\theta)(c\sin\theta)$$ $$A(\theta) = \frac{c^2}{2}\sin\theta\cos\theta$$
5.	Ahora que se tiene el área del triángulo en función del ángulo que va cambiando en función del tiempo, se procede a encontrar $\frac{dA}{dt}$	$$\frac{dA}{dt} = \frac{c^2}{2}[\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\sin\theta]$$ $$\frac{dA}{dt} = \frac{c^2}{2}\frac{d\theta}{dt}[(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2]$$ $$A'(\theta) = \frac{c^2}{2}\frac{d\theta}{dt}[(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2]$$
6.	Ahora que se tiene una ecuación de la razón de cambio del área en función del ángulo que varía respecto del tiempo, se necesita conocer el valor de esta razón cuando el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$, donde $c = 40\ cm\ y\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{36}rad/s$	$$A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{40^2}{2}\frac{\pi}{36}[(\cos\frac{\pi}{6})^2 - (\sin\frac{\pi}{6})^2]$$ $$A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -800\frac{\pi}{36}[(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2]$$ $$A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{200\pi}{9}[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}]$$ $$A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{200\pi}{9}[\frac{1}{2}]$$ $$A'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{100\pi}{9}\frac{cm^2}{s}$$

R//$\frac{dA}{dt} = -\frac{100\pi}{9}\frac{cm^2}{s}\ para\ \theta = \frac{\pi}{6}rad$

Tema 3 (20 puntos)

Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ cuya pendiente sea mínima.

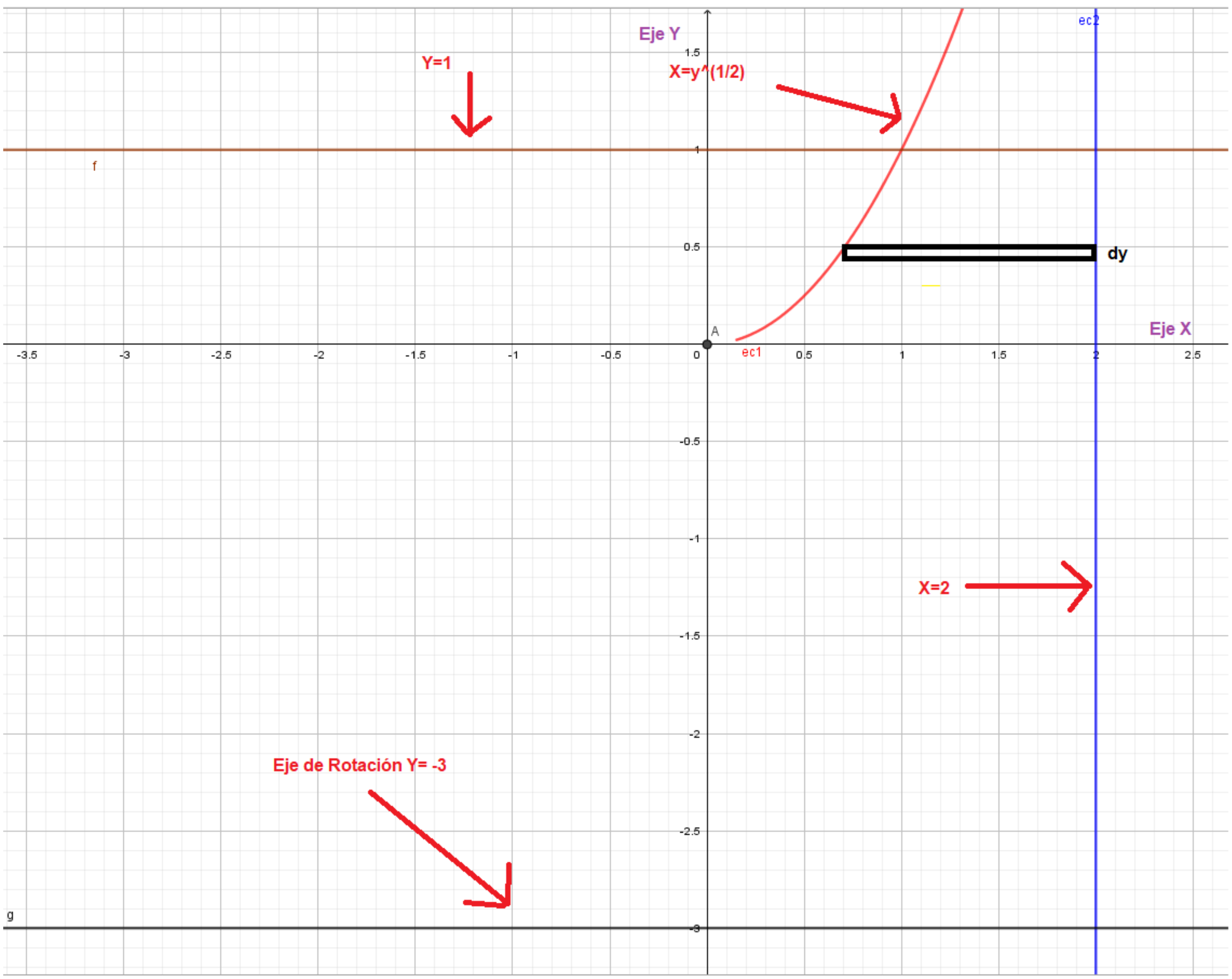
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe recordar que una recta tangente a una curva tiene un punto en común y que la derivada de una función en un punto, da como resultado la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto.	
2.	Sabiendo lo anterior, si derivamos la función y obtendremos una función que proporcionará todos los valores de las pendientes de las rectas tangentes a esa función	$y' = mt$ $mt = 3x^2 - 6x + 5$
3.	El problema pide encontrar una ecuación de la recta tangente en un punto de la curva y en donde dicha pendiente sea la menor, o sea la pendiente de la recta tangente sea mínima, sabiendo esto, la ecuación a minimizar será mt	$mt' = 0$ $mt' = 6x - 6$ $0 = 6x - 6$ $\frac{6}{6} = x$ $x = 1$
4.	Al realizar $mt' = 0$ estamos encontrando valores, ya sea máximos o mínimos de esa función, para poder saber qué tipo de valores son realizaremos la prueba de la primera derivada, aplicando valores cercanos a $x = 1$ por la izquierda y por la derecha	$mt'(0.5) = -3$ $mt'(1.5) = 3$
5.	La prueba realizada anteriormente nos muestra que el valor viene de un número negativo a un	

	número positivo, eso quiere decir que en $x = 1$ si existe un valor mínimo	
6.	Sabiendo que en $x = 1$ existe un valor mínimo, se procede a encontrar ese valor mínimo de la pendiente de la recta tangente	$mt(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 5$ $mt(1) = 2$
7.	Sabiendo que en $x = 1$ existe un valor de y dado por la curva dada y debido a lo planteado en el paso 1 procedemos a encontrar el valor de y para $x = 1$	$y(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 5(1)$ $y(1) = 3$
8.	Teniendo el punto (1,3) en la curva $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ se puede obtener la ecuación de la recta tangente que pasa por ese punto, ya que se obtuvo la pendiente de esa recta tangente en ese mismo punto	$y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 3 = 2(x - 1)$ $y = 2x - 2 + 3$ $y = 2x + 1$

R// $y = 2x + 1$

Tema 4 (20 puntos)

Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar la región acotada por la curva $x = \sqrt{y}$ y las rectas $y = 1, x = 2$, cuando gira alrededor de la recta $y = -3$. Usar método de cascarones cilíndricos.



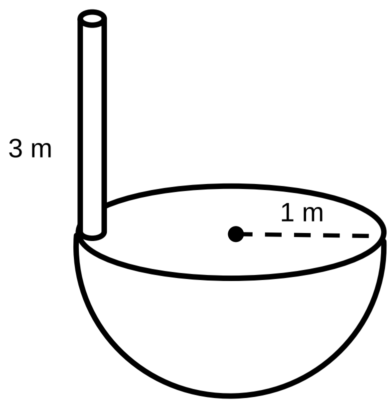
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe realizar una representación en el plano x-y para poder saber qué región es la que debe ser rotada, en este caso es la región acotada por la curva $x = \sqrt{y}$ y las rectas $y = 1, x = 2$ el problema pide que se realice el cálculo del volumen por medio del método de cascarones cilíndricos, esta región debe ser rotada alrededor de la recta $y = -3$	
2.	Como el método de cascarones cilíndricos pide utilizar un diferencial paralelo al eje de rotación, por este motivo se estará utilizando un diferencial de y	$V = 2\pi \int_c^d \bar{r} f(y) dy$
3.	Donde: $\bar{r}$ es la distancia del elemento diferencial al eje de rotación $f(y)$ es el tamaño del elemento diferencial	$\bar{r} = y - (-3)$ $\bar{r} = y + 3$ $f(y) = 2 - \sqrt{y}$
4.	Al definir los valores de $\bar{r}$ y $f(y)$ se procede a resolver la integral de volumen con los valores definidos tomando en cuenta que al utilizar un diferencial de y los límites de integración estarán respecto al eje y	$V = 2\pi \int_0^1 (y+3)(2-\sqrt{y})dy$ $V = 2\pi \int_0^1 (2y - y * y^{1/2} + 6 - 3y^{1/2})dy$ $V = 2\pi \int_0^1 (2y - y^{3/2} + 6 - 3y^{1/2})dy$ $V = 2\pi \left[y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + 6y - 2y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ $V = 2\pi \left[1 - \frac{2}{5} + 6 - 2\right]$

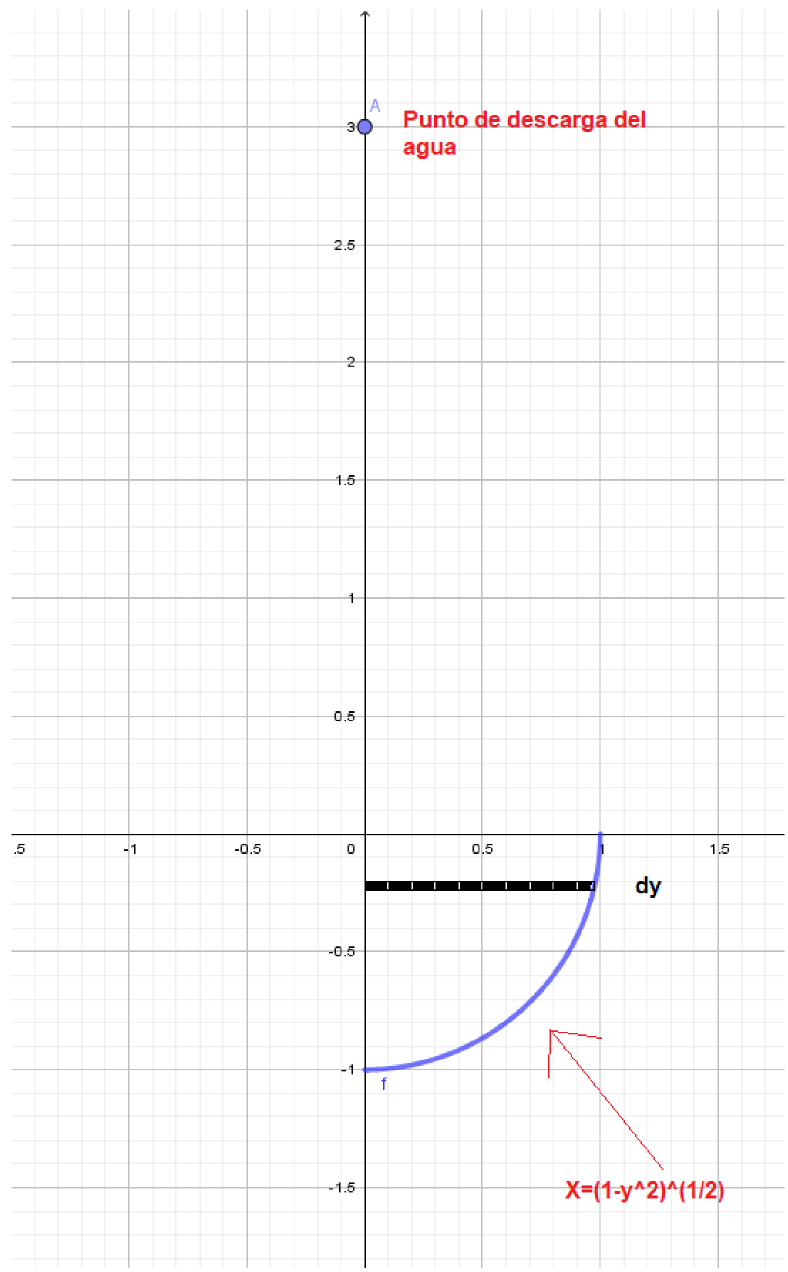
		$V = 2\pi(5 - \frac{2}{5})$ $V = 2\pi(\frac{23}{5})$ $V = \frac{46\pi}{5}U^3$

R// $V = \frac{46\pi}{5}U^3$

Tema 5 (10 puntos)

Calcular el trabajo necesario para bombear el agua por un punto de descarga que se encuentra a 3 metros de la parte superior de un tanque semiesférico (ver la figura). El tanque tiene un radio de 1 metro, al inicio se encuentra lleno de agua, al final se requiere quede con agua a un nivel de profundidad de 0.5 metros.





No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe definir la ecuación de trabajo para una fuerza variable	$$W = \int_a^b Fd$$
2.	Sabiendo que lo que se necesita saber es el trabajo requerido para poder bombear el agua de un tanque semiesférico a una altura de 3 metros por encima de él, el tanque está completamente lleno y se requiere que quede a la mitad, recordando que $F = mg$, además de que el fluido es agua y su densidad es de 1000 $\frac{kg}{m^3}$ se sabe que $\rho = \frac{m}{v}$	$$W = \int_a^b mgd$$ $$W = \int_a^b \rho V gd$$
3.	Sabemos que el tanque es de forma semiesférico, por tanto, viendo el tanque en vista de planta, se puede apreciar una circunferencia, y al dibujar una vista de perfil (ver grafica al inicio) nos podemos dar cuenta que lo que ira variando en función del nivel del agua será la distancia X	
4.	Al ver la gráfica (vista de perfil del tanque) podemos darnos cuenta que la mitad del tanque que hemos graficado se asemeja a ¼ de circunferencia, por tanto, podemos dejar expresada la distancia x en función de y, ya que el elemento diferencial que utilizaremos será un dy	$$x = \sqrt{1 - y}$$
5.	Podemos apreciar que conforme vaya vaciándose el tanque, una especie de pequeños discos (con altura dy) irán subiendo hasta el punto de descarga, por tanto, será una especie de pequeños volúmenes los que se irán desplazando conforme se vaya vaciando el tanque, pero en este caso solo estamos analizando la mitad del tanque, por ende, será la	$$V = Ady$$ $$V = \frac{\pi x^2}{2} dy$$ $$V = \frac{\pi}{2}(\sqrt{1 - y^2})^2 dy$$

	mitad del volumen que estará subiendo, al final el resultado que obtengamos tendremos que multiplicarlo por 2 para poder tener el trabajo total	$V = \frac{\pi}{2}(1 - y^2)dy$
6.	Ahora que ya tenemos el volumen que se irá desplazando conforme se vaya vaciando el tanque, nos falta definir la distancia que habrá del nivel del agua al punto de descarga conforme se vaya vaciando el tanque, recordando que el trabajo se obtiene mediante el producto de la fuerza por la distancia	$d = 3 - y$
7.	La distancia está definida como $d = 3 - y$ esto funciona para nuestro punto de referencia (que es el origen) ya que en este caso fue colocado en la parte superior del tanque, el punto de referencia puede ser colocado en donde más se le facilite, pudo haber sido colocado en el punto más bajo del tanque (haciendo las modificaciones necesarias para definir la distancia X que ira variando) o en el punto de descarga del tanque.	Para una $y = 0$ la distancia será de 3 Para una $y = -0.5$ la distancia será de 3.5
8.	Teniendo los datos que necesitamos para poder realizar la integral del trabajo procedemos a realizarla.	$W = -\int_0^{-0.5} \rho \frac{\pi}{2}(1 - y^2)dyg(3 - y)$ $W = -\rho g \frac{\pi}{2}\int_0^{-0.5}(1 - y^2)(3 - y)dy$ $W = -\frac{9800\pi}{2}\int_0^{-0.5}(3 - y - 3y^2 + y^3)dy$ $W = -\frac{9800\pi}{2}\left[3y - \frac{y^2}{2} - y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^{-0.5}$ $W = -\frac{9800\pi}{2}\left[3(-0.5) - \frac{(-0.5)^2}{2} - (-0.5)^3 + \frac{(-0.5)^4}{4}\right]$

		$W = -\frac{9800\pi}{2}\left(-\frac{95}{64}\right)$ $W = \frac{116375}{16}\pi$ $W = 22.85 * 10^3 J$ $W = 22.85kJ$ $W = 2 * 22.85kJ$ $W = 45.7kJ$

R// $W = 45.7kJ$