UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**Matemática intermedia 01**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen parcial**
NOMBRE DEL AUXILIAR	**Edgar Hurtarte**
FECHA:	**22 de octubre 2019**
SEMESTRE:	**Segundo semestre**
HORARIO DE EXAMEN:	**9:00-11:00**
CLAVE	**CLAVE-107-2-M-1-00-2019**

Segundo Parcial

TEMA No.1 (15 Puntos)

A) Resolver

$$\int_0^1 \ln\left(x^3\right)\,dx$$

(7 puntos)

B) Resolver

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

(8puntos)

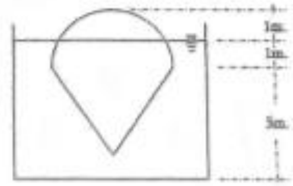
TEMA No.2 (25 Puntos)

A) Obtenga el área del semicírculo de radio 1 dado por la integral, usando el método de Simpson con $n = 6$ y 6 decimales.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(13puntos)

B) Plantee la o las integrales que calculen la fuerza hidrostática sobre la placa mostrada sumergida en agua.



TEMA No.3 (18 Puntos)

Dadas las ecuaciones paramétricas $x(t) = 1 + sent$; $y(t) = \cos t$; $\frac{3}{2}\pi \leq t \leq 2\pi$

i) Obtenga la ecuación cartesiana (3puntos)
ii) Obtenga la grafica en el intervalo, indicando su dirección (5puntos)
iii) Plantee la o las integrales que calculen la longitud de arco en cartesianas (5puntos)
iv) Si el segmento de curva gira respecto al eje y, plantee la integral que calcule el área de la superficie generada en paramétricas. (5puntos)

TEMA No.4 (18 Puntos)

Dadas las curvas polares $r^2 = 9sen(2\theta)$; $r = 2$

i) Obtenga la grafica de ambas curvas en un mismo plano polar (6 puntos)
ii) Plantee la o las integrales que calculen el área de la región común entre ambas curvas (área de intersección), indique sus diferenciales en la grafica. (6puntos)
iii) Plantee la o las integrales que calculen la longitud de la curva $r^2 = 9sen(2\theta)$ que este fuera de $r = 2$ (6puntos)

TEMA No.5 (14 Puntos)

Dada la curva polar con directriz $r = -3\sec\theta$ y semieje mayor $\frac{18}{5}$, Obtenga:

Foco

i) Ecuación polar de la curva $r(\theta) = ?$ (4puntos)
ii) Grafica. (4puntos)
iii) Coordenadas de focos (3 puntos)
iv) Coordenadas del centro (3puntos)

TEMA No.6 (10 Puntos)

Dado el punto $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$, obtenga otra forma de representar el mismo punto, según la restricción en cada caso.

i) $r > 0$ y $\theta < 0$ (3puntos)
ii) $r < 0$ y $\theta < 0$ (3puntos)
iii) $r > 0$ y $\theta > 2\pi$ (4puntos)

TEMA 1

Inciso A

Primero se debe de debe de analizar la integral para conocer donde es discontinua y luego proceder a utilizar limites como se muestra a continuación.	$\int_0^1 lnx^3 dx = \int_0^1 3lnx\ dx$ $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 3lnx\ dx$
Luego de haber aplicado limites para la zona donde la integral es discontinua se debe realizar la integral que quedo con su respectivo procedimiento tal como se observa	$\int lnx\ dx$ $u = lnx \qquad dv = dx$ $du = \frac{1}{dx} dx \qquad v = x$ $\int lnx\ dx = xlnx - \int \frac{1}{x} * xd\ x$ $xlnx - x$ $\lim_{a\to 0^+} 3(xlnx - x)_a^1$ $\lim_{a\to 0^+} 3[-1 + a(lna - 1)]$
Luego se puede aplicar L'Hopital para poder encontrar el valor de la integral para ello con la única parte que se trabajara es con la que se ve afectada con la letra "a" tal como se observa a continuación	$\lim_{a\to 0^+} [a(lna - 1)]$ $\lim_{a\to 0^+} \frac{lna}{1/a} = \frac{1/a}{-1/a^2} = 0$
Luego de encontrar el limite se procede a encontrar el valor de la integral	Respuesta $\int_0^1 lnx^3 dx = 3[-1+0] = -3$

Inciso B

Primero se debe de agregar un límite donde la función no sea continua para este caso se aplicará donde se encuentra el ∞ tal como se muestra a continuación	$$\lim_{b \to -\infty} \int_a^0 \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}} dx$$
Se procede a realizar el procedimiento correspondiente para poder resolver la integral	$$u = x^2 + 1$$ $$du = 2x\, dx$$ $$\int \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{5/2}}$$ $$\frac{1}{2} \frac{u^{-3/2}}{(-3/2)} + c$$
Luego de resuelta la integral se procede a resolver utilizando los límites de integración la integral par luego poder resolver el limite con tendencia al infinito planteado al principio. El Procedimiento se puede observar a continuación	$$\lim_{b \to -\infty} -\frac{1}{3} \lvert (x^2+1)^{-3/2} \rvert_a^0$$ $$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lim_{b \to -\infty} \frac{1}{(b^2+1)^{3/2}}$$
Se puede observar que el valor del límite anterior es cero entonces la respuesta será -1/3	Respuesta $$\int \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}} dx = -\frac{1}{3}$$

TEMA 2

Inciso A

Primero se debe de encontrar el valor de Δx para poder empezar a trabajar con el método de Simpson, tal como se ve a continuación	$\Delta x = \frac{1-(-1)}{6} = \frac{1}{3}$

Luego de encontrar el valor de Δx se procede a construir una tabla como se puede observar a continuación, donde:

- Δx= Se puede denominar el salto que hay de limite a limite

- X_n = Se puede denominar como los limites obtenidos mediante la suma del límite inferior de la integral con Δx como, por ejemplo

-1+1/3 = -0.66

Siendo -1 el valor del limite inferior de nuestra integral y 1/3 el valor del Δx, el procedimiento se realiza las veces que **n** lo va a denominar, para esta ocasión **n=6** los valores para **n** hay que tomarlos desde 0 hasta el numero indicado, para esta ocasión será desde **0-6**, el valor de X_n debe de ser igual al limite superior de la integral, para este caso debe de ser 1

- $f(X_n)$ = Es únicamente valuar los valores de X_n en la función de la integral

- K_i = son los coeficientes de Simpson que empiezan desde 1 y luego se alternan hasta de 4 a 2 hasta llegar a 1 en el último limite

- Ki $f(X_n)$ = Es únicamente el producto de los dos elementos

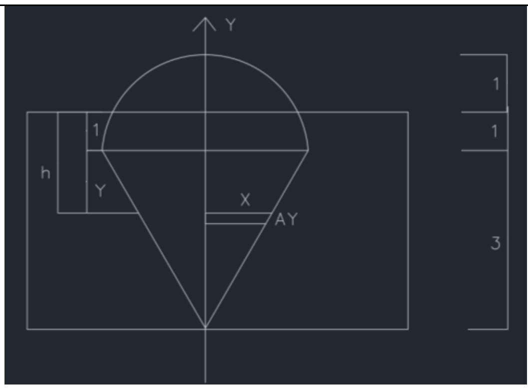
La tabla se comprende de la siguiente manera:

n	Xn	$f(X_n)$	K_i	Ki $f(X_n)$
0	-1	0	1	0
1	-0.66	0.745356	4	2.981424
2	-0.33	0.942809	2	1.885618
3	0	1	4	4.000000
4	0.33	0.942809	2	1.885618
5	0.66	0.745356	4	2.981424
6	1	0	1	0
			$\sum \mathbf{Ki\ f(Xn)}$	13.734084

Luego de haber obtenido la sumatoria de **Ki $f(X_n)$** se procede a realizar el siguiente procedimiento para poder obtener la respuesta definitiva de la integral.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{(13.734084)(1/3)}{3} = 1.52601$$

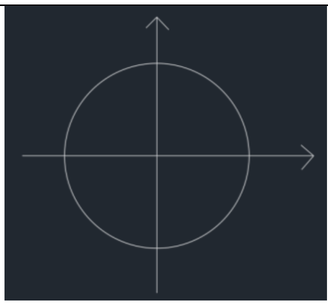
Inciso B

<table>
<tr><td>Primero se debe de analizar la figura que tiene nuestra placa</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Una vez analizada la figura se procede a calcular la presión (p), la profundidad (h) y la fuerza hidrostática de una placa horizontal (F)</td><td>

$$P = \partial * h$$

$$\Delta F = P * \Delta Y = \partial * h(2x\Delta y)$$

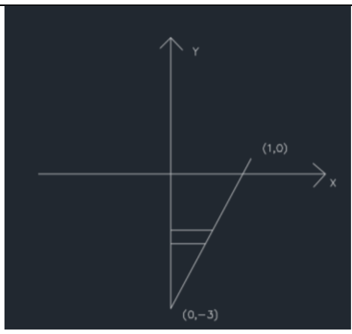
$$h = 1 - y, P = \partial(1 - y)$$

</td></tr>
<tr><td>Luego como ya se analizo la figura se sabe que esta formada por un semicírculo y un triángulo equilátero
Primero se analizará el circulo para luego obtener una integral que defina el área del semicírculo</td><td>

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1\text{-}y^2}$$

$$F1 \ = 2\int_{y=0}^{y=1} \partial(1 - y)(\sqrt{1\text{-}y^2})dy$$

</td></tr>
<tr><td>A continuación se analizara la mitad del triangulo</td><td>

$$\frac{X}{1} + \frac{Y}{-3} = 1$$

$$X = \left(1 + \frac{Y}{3}\right)$$

$$F2 \ = 4\int_{y=-3}^{y=0} \partial(1 - y)\left(1 + \frac{Y}{3}\right)dy$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta
Para obtener la integral se debe de realizar F= F1+F2

$$F = 4\int_{-3}^{0} \partial(1 - y)\left(1 + \frac{Y}{3}\right)dy + 2\int_{0}^{1} \partial(1 - y)(\sqrt{1\text{-}y^2})dy$$

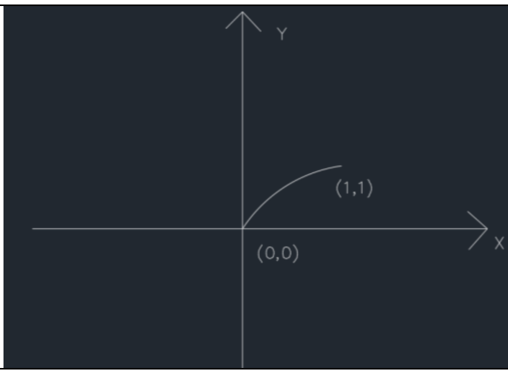
</td></tr>
</table>

TEMA 3

Inciso i

Para obtener las ecuaciones cartesianas primero se debe de tomar en cuenta las ecuaciones paramétricas que se dan al principio, para poder encontrar las ecuaciones cartesianas se procede a realizar el siguiente procedimiento	$X = 1 + sent \quad ; Y = \ Cost$ $(x+1)^2 = \text{sent}^2$ $\text{Y}^2 = \text{Cost}^2$ $(x+1)^2 + \text{Y}^2 = 1$

Inciso ii

<table>
<tr><td>Primero se debe de encontrar la función para poder encontrar los valores de Y, para nuestro caso va a ser el siguiente</td><td>$\text{y} \ = \ \sqrt{1\text{-}(\text{x-}1)^2}$</td></tr>
<tr><td>Lego se procede a calcular los valores del limite establecido valuando cada uno en la función anterior dándonos como resultado la siguiente tabla</td><td>
<table>
<tr><th>t</th><th>3н/2</th><th>2н</th><th>7н/4</th></tr>
<tr><th>X</th><td>0</td><td>1</td><td>0.3</td></tr>
<tr><th>Y</th><td>0</td><td>1</td><td>0.7</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>La grafica obtenida es la siguiente</td><td>
</td></tr>
</table>

Inciso iii

Para poder encontrar la longitud de arco en cartesianas se debe de tomar como base la siguiente ecuación	$L = \int_{\text{a}}^{\text{b}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \ dx$
Como primer paso se debe de encontrar la derivada de f(x) en nuestro caso la ecuación planteada en el inciso anterior, el procedimiento es el siguiente	$\text{f(x)} \ = \ \sqrt{1\text{-}(\text{x-}1)^2}$ $f'(x) = \frac{1}{2}[1\text{-}(x-1)^2]^{-1/2}[-2(x-1)]$ $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1\text{-}(x-1)^2}$

Respuesta

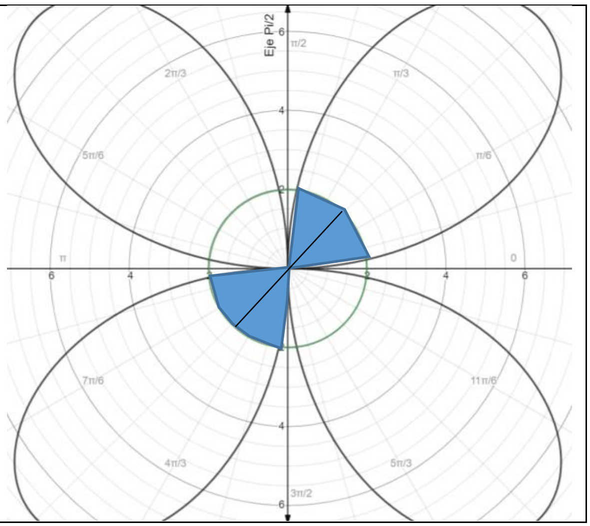
$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{1\text{-}(x-1)^2}} \text{dx}$$

Inciso iv

Para poder generar el área de la superficie en paramétricas se debe de tomar en cuenta lo siguiente	$s = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$
Respuesta Para poder obtener el área de la superficie generada se debe de realizar lo siguiente $s = \int_{3\pi/2}^{2\pi} 2\pi(1+\mathrm{sen}^2 t)\sqrt{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t}\ dt$ $s = 2\pi \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos t\ dt$	

TEMA 4

Inciso i

La grafica puede ser obtenida graficando las dos funciones en un mismo plano, la que se puede graficar primero para mayor facilidad es r =2 y luego proseguir con la otra curva polar en tal como se ve en la siguiente.	

Inciso ii

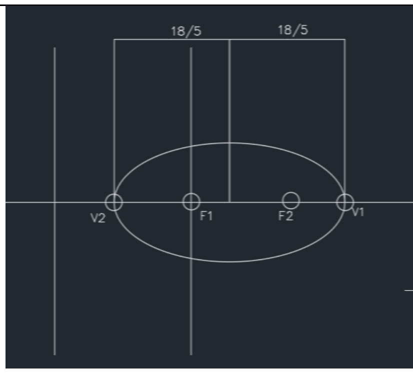
Primero se deben de encontrar los puntos de intersección como se puede ver a continuación	$4 = 9sen(2\emptyset)$ $Sen(2\emptyset) = 4/9$ $\emptyset = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^{-1}(4/9)\ =\ 0.23$
Luego de eso se procede a calcular el área que está en color azul utilizando los nuevos límites tal como se ve a continuación	$A = 4{*}\left[\int_0^{0.23}(9\mathrm{sen}2\emptyset)\ d\emptyset\ + \int_{0.23}^{\pi/4}\frac{1}{2}(2^2)d\emptyset\right]$

Inciso iii

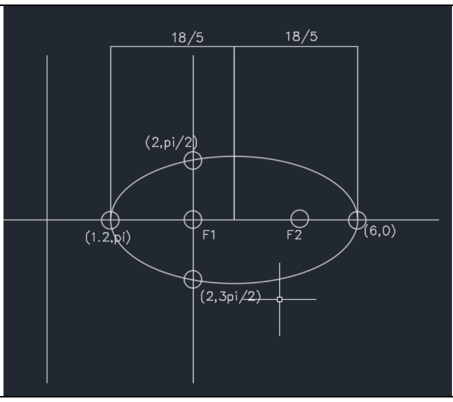
Para poder encontrar la integral correspondiente a la longitud de curva que este afuera de r =2 se debe de hacer lo siguiente	$L = 4\int_{0.23}^{\pi/4}\sqrt{9\mathrm{sen}2\emptyset + \frac{3}{2}(\mathrm{sen}2\emptyset)^{-1/2}(2\cos 2\emptyset)}\ d\emptyset$

TEMA 5

Inciso i

Primero se debe de analizar la gráfica de la función en este caso la grafica queda de la siguiente manera	
Primero se deben de encontrar los vértices y los radios tal como se puede observar a continuación	$x = -3 = -d$ $d = 3$ $r = \frac{\mathrm{ed}}{1\text{-ecos}\emptyset}$ $V1:\ \emptyset = 0 \rightarrow r = \frac{\mathrm{ed}}{1\text{-e}} \rightarrow \left(\frac{\mathrm{ed}}{1\text{-e}}, 0\right)$ $\mathrm{V2}:\ \emptyset = \pi \rightarrow \mathrm{r} = \frac{\mathrm{ed}}{1+\mathrm{e}} \rightarrow \left(\frac{\mathrm{ed}}{1+\mathrm{e}}, \pi\right)$ $\left.\begin{matrix} \mathrm{a}+\mathrm{c} = \frac{\mathrm{ed}}{1\text{-e}} & 1 \\ \mathrm{a}\text{-}\mathrm{c} = \frac{\mathrm{ed}}{1+\mathrm{e}} & 2 \end{matrix}\right\} +$ $2a(1-\mathrm{e}^2) = ed(1+e+1-e) = 2ed$ $a(1-\mathrm{e}^2) = ed$ $\frac{18}{5}(1-\mathrm{e}^2) = 3e$ $e = 2/3$ $\mathrm{r} = \frac{2}{1\text{- }2/3\cos\emptyset} = \frac{2}{3\text{- }2\cos\emptyset}$

Inciso ii

<table>
<tr><td>Para poder realizar la grafica se deben de aplicar valores a la función tal como se ve a continuación</td><td><table><tr><td>Ø</td><td>0</td><td>н/2</td><td>н</td><td>3н/2</td></tr><tr><td>r</td><td>6</td><td>2</td><td>1.2</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>La grafica quedaría de esta forma</td><td>
</td></tr>
</table>

Inciso ii

<table>
<tr><td>Para poder encontrar los focos se debe de tomar en centa que el F1 esa en el origen entonces el único foco a encontrar debe de ser el F2 el que se encuentra de la siguiente manera</td><td>$$2c = 2\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{24}{5} = 4.8$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta
Coordenadas de los focos
F1= (0,0)
F2= (4.8,0)</td></tr>
</table>

Inciso ii

<table>
<tr><td>Para poder encontrar las coordenadas del centro se debe de realizar lo siguiente</td><td>$a + c = 6$
$c = 6 - 18/5 = 12/5 = 2.4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta
Coordenadas del centro
C= (2.4,0)</td></tr>
</table>

TEMA 6

i	r > 0 , Ø < 0	$(-2, \pi/6) = (2, \pi/6 - \pi) = (2, -5\pi/6)$
ii	r < 0 , Ø < 0	$(2, -5\pi/6) = (2, -5\pi/6 - \pi) = (2, -11\pi/6)$
iii	r > 0 , Ø >2н	$(-2, \pi/6) = (2, \pi/6 + 3\pi) = (2, 19\pi/6)$