UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**Matemática intermedia 01**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
NOMBRE DEL AUXILIAR	**Edgar Hurtarte**
FECHA:	**22 de octubre 2019**
SEMESTRE:	**Primer semestre**
HORARIO DE EXAMEN:	**9:00-11:00**
CLAVE	**CLAVE-107-4-M-1-00-2019**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE 2019

MATEMÁTICA INTERMEDIA 1
JORNADA MATUTINA
EXAMEN FINAL
08/05/2019
TEMARIO A

Tema 1(10 puntos): ¿Qué valores de A, B y C debe tener el sistema dado en forma de matriz aumentada para que tenga única solución, infinitas soluciones o sin solución (sugerencia: Utilice el método de Gauss?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & A \\ -3 & -10 & 13 & B \\ 5 & 17 & -21 & C \end{array}\right)$$

Tema 2 (10 puntos): Encontrar el valor del determinante, utilizando combinación de métodos.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

Tema 3 (10 puntos): Resolver las siguientes Integrales (5 puntos c/u)

a. $\int_1^2 \ln(x-1)\,dx$ b. $\int_0^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$

Tema 4 (10 puntos): Dadas las siguientes funciones.

$$y^2 = x, \quad y = -x + 2 \quad \& \quad x = 1$$

a. Graficar en un mismo plano las funciones (3 puntos)

b. Encontrar el centroide delimitadas por ellas (dejar evidencia del procedimiento) (7 puntos)

Tema 5 (10 puntos): Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = 3cost \quad \& \quad y = 4sent, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

a. Dibujar la curva indicando su dirección (5 puntos)

b. Eliminar el parámetro encontrando la ecuación en cartesianas (no utilizar trigonométricas inversas) (5 puntos)

Tema 6 (10 puntos): Dadas las siguientes ecuaciones polares.

$$r = 1 + cos\theta \quad \& \quad r = \frac{1}{1 + cos\theta}$$

a. Grafique e identifique las curvas (3 puntos)

b. Encontrar los puntos de intersección (3 puntos)

c. Plantear el área en común (4 puntos)

Tema 7 (10 puntos): Resolver la siguiente integral utilizando serie de potencias con n = 4 y 3 cifras significativas.

$$\int_0^{0.5} \ln(1-x)\,dx, \quad sabiendo\ que: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Tema 8 (10 puntos): Encontrar el radio e intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tema 9.a (06 puntos): Graficar en R^3 las ecuaciones dadas a continuación (dejar evidencia del procedimiento utilizado):

i. $r = 3cos\theta$ ii. $x^2 + y^2 + z = 0$

Tema 9.b (4 puntos): Encuentre las coordenadas cilíndricas y esféricas del siguiente punto dado en coordenadas cartesianas.

$$P(-1, 1, -4)$$

Tema 10 (10 puntos): Dadas las siguientes ecuaciones en cilíndricas o esféricas:

a. Trasladar a coordenadas cartesianas dejando evidencia del procedimiento.

b. Graficar en R^3.

i. $\rho = 4csc\varphi sec\theta$ (3 puntos) ii. $z = r^2 sen^2\theta$ (3 puntos) iii. $r = \sqrt{z}$ (4 puntos)

TEMA 1

Para utilizar el método de Gauss Primero se deben de analizar las filas con las que se va a trabajar, para esta matriz se tomaran las filas 2 y 3 siendo representadas como F_2 y F_3. Y se realizaran las siguientes operaciones $F_2 = F_2 + 3F_1$ $F_3 = F_3 - 5F_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \vdots & A \\ -3 & -10 & 13 & \vdots & B \\ 5 & 17 & -21 & & C \end{bmatrix}$
Dando como Resultado lo siguiente	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & & A \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & B-3A \\ 0 & -3 & -6 & & C-5A \end{bmatrix}$
Tomando como base la matriz anterior se procede a encontrar la forma aumentada de la matriz original Ahora trabajando únicamente con la fila 3 (F_3) $F_3 = 2F_3 + 3F_2$ Y se obtiene el siguiente resultado	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & & A \\ 0 & 2 & 4 & \vdots & B-3A \\ 0 & 0 & 0 & & 20C-19A-3B \end{bmatrix}$
Respuesta Luego de encontrar la forma aumentada de la matriz se llega a lo siguiente • No hay valores de A, B y C para que pueda tener una única solución • Si 2C -19 A + 3B = 0 Tiene infinitas soluciones • Si 2C -19 A + 3B ≠ 0 No tiene Solución	

TEMA 2

Para poder encontrar el valor del determinante primero se debe de analizar la matriz original para poder conocer las filas con las que se va a trabajar, para esta matriz se trabajara con la fila 2, 3 y 4 Utilizando las siguientes operaciones $F_2 = F_2 - 4F_1$ $F_3 = F_3 - F_1$ $F_4 = 2F_4 - 3F_1$ Dando como resultado la siguiente matriz	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 21 & -23 & 15 \\ 0 & 7 & -7 & 1 \\ 0 & 13 & -1 & 30 \end{pmatrix}$
Tomando la columna 1 y resolviendo por cofactores tal como se ve en la siguiente representación	$C_{11}a_{11} + C_{21}a_{21} + C_{21}a_{31} + C_{41} + a_{41} = detB$
Luego de realizar las operaciones correspondientes se sabe que " $C_{21}a_{21} + C_{21}a_{31} + C_{41} + a_{41}$" son iguales a cero	
Luego se procede a encontrar el determinante B utilizando lo siguiente	$det_b = a_{11}C_{11}$ $det_b = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11}$ Donde $M_{11} = det(n-1)$
Luego se procede a calcular el determinante para M_{11} tal como se puede observar a continuación	$M_{11} = \begin{bmatrix} 21 & -23-15 & 21-23 \\ 7 & -7+1 & 7-7 \\ 13 & -1-30 & 13-1 \end{bmatrix}$
$M_{11} = det(n-1) = (21)(-7)(-30) + (-23)(1)(15) + (15)(7)(-1) - [(13)(-7)(-15) + (-1)(1)(21) + (30(7)(-23)]$ Entonces $C_{11}M_{11} = -3916$ $Det_B = -3916$ $Det_A = \frac{-3916}{2}$ $Det_A = -1958$	

TEMA 3

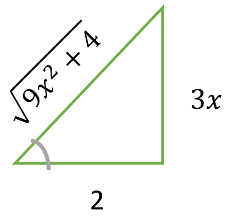
INCISO A

Primero se procede a analizar la integral, para este caso podemos llegar a la conclusión que es una integral impropia	
A continuación, se realiza la sustitución de los limites de la integral, siempre tomado en cuenta donde la integral vaya a ser discontinua, en este caso será utilizando el valor de 1. Para poder realizar la sustitución se deben de utilizar limites como se ve en el siguiente cuadro.	$\lim_{t \to 1^+} \int_t^2 ln(x-1)\, dx$
Luego se procede a realizar el siguiente análisis con los limites propuestos originalmente, en este caso sera 1 y 2	$u = x - 1$ $x = 1 \rightarrow u = 0$ $x = 2 \rightarrow u = 1$ $du = dx$
Ahora se procede a sustituir las variables “x” con “u” y así mismo se procede a cambiar el valor de los límites, tomando los encontrados anteriormene	$\lim_{t\prime \to 0^+} \int_t^1 ln(u)\, du$
Se realiza el procedimiento para poder encontrar la integral de “ln(u)”, no hay que olvidar que es una integral con limites entonces se debe de realizar como tal.	$\lim_{t' \to 0^+} [uln(u) - u]_t^1$ $\lim_{t' \to 0^+} [(1ln(1) - 1) - (t'ln(t') - t')]$ $\lim_{t' \to 0^+} \left[(-1) - \frac{ln(t')}{1/t'}\right]$
Se aplica l'hopital para poder resolver el limite el cual nos da como resultado lo siguiente	$\lim_{t' \to 0^+} \left[(-1) - \frac{ln(t')}{1/t'}\right]$ $\lim_{t' \to 0^+} [(-1) - 0]$
Respuesta **Y se procede a establecer que la integral converge en (-1) de acuerdo con el resultado del límite anterior**	

INCISO B

<table>
<tr>
<td>Primero se debe de analizar la integral para poder determinar mediante que método se puede llevar a cabo la solución, para este caso se debe de utilizar el método de sustitución trigonométrica tal como se puede ver a continuación</td>
<td>

$$\int_0^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$$



</td>
</tr>
<tr>
<td>Se procede a realizar las sustituciones correspondientes para poder llevar a cabo el método de sustitución trigonométrica tomando como base el a ángulo indicado con la línea gris en la figura anterior</td>
<td>

$$\frac{3x}{2} = tan\emptyset$$

$$X = \frac{2}{3} tan\emptyset$$

$$dx \; = \frac{2}{3} sec^2\emptyset \; d\emptyset$$

$$\frac{\sqrt{9x^2+4}}{2} = sec\emptyset$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Luego se procede a hacer la conversión a radianes para los límites de la integral</td>
<td>X = 0 ; Ø=0
X = 4/3 ; Ø=1.107 rad</td>
</tr>
<tr>
<td>Luego se procede a realizar la sustitución correspondiente para poder empezar a realizar la integral.
A continuación, se presenta el procedimiento necesario para poder realizar la integral</td>
<td>

$$\int_0^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}} = \int_0^{1.107} \frac{(2/3)sec^2\emptyset \; d\emptyset}{2sec\emptyset}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{1.107} sec\emptyset \; d\emptyset$$

$$\frac{1}{3} ln[sec\emptyset + tan\emptyset]_0^{1.107}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

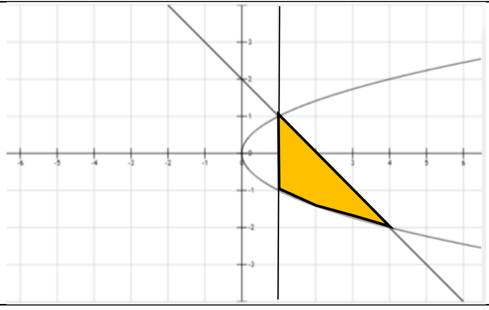
Respuesta

$$\frac{1}{3} ln[sec(1.107) + tan(1.107)] - \frac{1}{3} ln[sec(0) + tan(0)] = \mathbf{0.48}$$

</td>
</tr>
</table>

TEMA 4

Inciso A

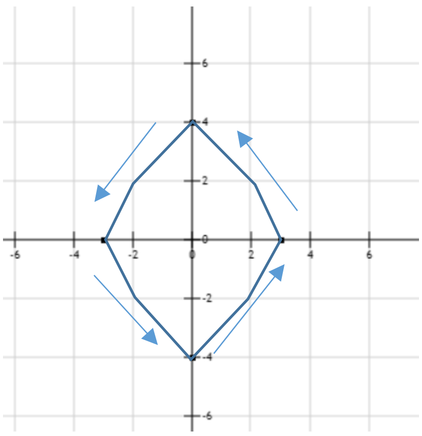
Primero se deben de graficar las 3 graficas en el mismo plano, la grafica queda de la siguiente manera	

Inciso B

Para poder encontrar el centroide del area delimitada en amarillo se deben de encontrar los puntos de intersección para ello se realiza el siguiente procedimiento.	$y^2 = y^2$ $x = (-x+2)^2$ $x = x^2 - 4x + 4$ $0 = x^2 - 5x + 4$ $0 = (x-4)(x-1)$ $x = 4\ ,\ \ x = 1$ $y = -x + 2$ $y = -1 + 2$ $y = 1$ Puntos de intersección (1,4)(-2,4)
Para poder encontrar el centroide del área ocupada la sección amarilla se debe de hacer lo siguiente	$\boldsymbol{x} = \dfrac{\int_1^4 \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) - \left(-\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{dx}}{\int_1^4 [(-\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) - (-\sqrt{\boldsymbol{x}})]}$ $\boldsymbol{x} = \dfrac{\int_1^4 -\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{3/2}\boldsymbol{dx}}{\int_1^4 -\boldsymbol{x} + \mathbf{2} + \boldsymbol{x}^{(1/2)}} = \mathbf{2.021}$ $\boldsymbol{x} = \dfrac{\int_1^4 (-\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2 - \left(-\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)^2 \boldsymbol{dx}}{\int_1^4 [(-\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2 - (-\sqrt{\boldsymbol{x}})]}$ $\boldsymbol{x} = \dfrac{\int_1^4 (\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} + 4) - \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{dx}}{\int_1^4 -\boldsymbol{x} + \mathbf{2} + \boldsymbol{x}^{(1/2)}} = \mathbf{-0.710}$

TEMA 5

Inciso A

<table>
<tr><td>Para poder dibujar la curva se debe de realizar la siguiente tabla.</td><td>
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>н/2</td><td>н</td><td>3н/2</td><td>2н</td></tr>
<tr><td>x</td><td>3</td><td>0</td><td>-3</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>-4</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>La grafica queda de la siguiente forma</td><td>Grafica
</td></tr>
</table>

Inciso B

Para poder eliminar el parámetro de la ecuación se deben de tener en cuenta las dos siguientes ecuaciones	$\frac{x}{3} = cost$ $\frac{y}{4} = sent$
Y se debe tener en cuenta la siguiente identidad trigonométrica	$cos^2t + sen^2t = 1$
Entonces se puede llegar a la siguiente conclusión	**Respuesta** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

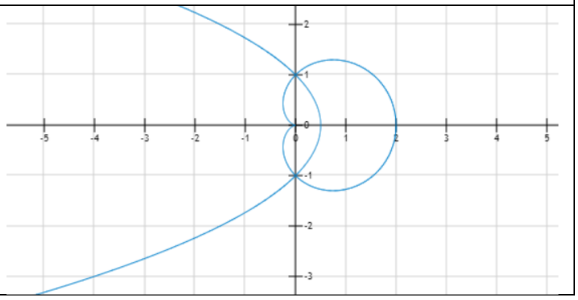
TEMA 6

Inciso A

Para poder graficar las coordenadas polares se debe de utilizar la siguiente tabla (donde las ecuaciones polares se identifican como R1 y R2)

Ø	0	ԋ/2	ԋ	3ԋ/2	2ԋ
R1	2	1	0	1	2
R2	1/2	1	∄	1	1/2

La grafica queda de la siguiente forma



Inciso B

Para poder encontrar los puntos de intersección se debe de realizar lo siguiente

$$R1 = R2$$
$$1 + cos\emptyset = \frac{1}{1 + cos\emptyset}$$
$$(1 + cos\emptyset)^2 = 1$$
$$1 + 2cos\emptyset + cos^2\emptyset = 1$$
$$cos\emptyset(2 + cos\emptyset) = 0$$
$$cos\emptyset = 0$$
$$\emptyset = cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$cos\emptyset = -2$$
$$\emptyset = cos^{-1}(-2) = \nexists$$

Puntos de intersección
(1,ԋ/2) , (1+3ԋ/2)

Inciso B

El área común se puede plantear de la siguiente manera

$$A = \frac{1}{2}(2)\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1 + cos\emptyset}\right)^2 d\emptyset + \frac{1}{2}(2)\int_0^{\pi/2}(1 + cos\emptyset)^2\, d\emptyset$$

TEMA 7

Primero se debe de resolver como integral lo siguiente	$$\int \frac{1}{1-x}dx = -ln(1-x)$$
Luego de haber resulto la integral se debe de realizar le siguiente procedimiento.	$$\int -\frac{1}{1-x}dx = \int -\sum_{n=0}^{\infty} x^1 dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} + c = +ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} + c$$ Si x =0 ln(1-0) = 0+C →C=0
Se resuelve la integral de la siguiente manera	$$\int_0^{0.5} ln(1-x)dx = -\int_0^{0.5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Big|_0^{0.5}$$ $$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.5)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$ $$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.5)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
Luego de obtener lo anterior se procede a valuar los valores solicitados que van desde n=0 hasta n=4	n=0: -0.125; n=1: -0.02088; n=2: -0.00521; n=3: -0.001562; n=4: -0.000520
Al realizar la suma de todos los datos anteriores da como respuesta	**Respuesta** $$-\sum_{n=0}^{4}\frac{(0.5)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -0.153$$

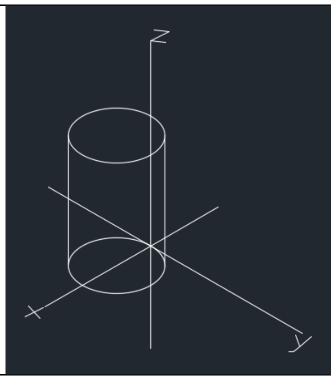
n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
-0.125	-0.02088	-0.00521	-0.001562	-0.000520

TEMA 8

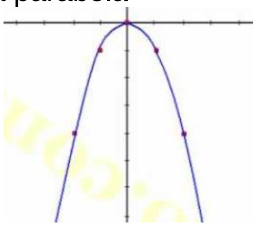
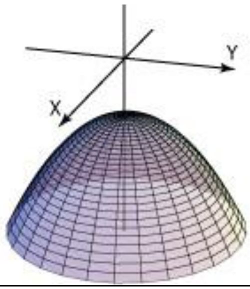
Para poder encontrar el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias se debe de trabajar utilizando el criterio del cociente	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
El procedimiento se debe de realizar de la siguiente forma	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{((2n+1)+1)!} * \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right\| < 1$ $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(-1) x^{2n} x^3}{(2n+3)!} * \frac{(2n+1)!}{x^{2n} x} \right\| < 1$ $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(-1) x^2 (2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \right\| < 1$ $\|x^2\| \lim_{n\to\infty} \left\| \cancelto{0}{\frac{(1)}{(2n+2)(2n+1)!}} \right\| < 1$ Cumple para todo “x” Porque 0 < 1
Respuesta Intervalo = $(-\infty, \infty)$ Radio = ∞	

TEMA 9

Inciso 9.a

Para poder graficar las siguientes ecuaciones se sabe que en R_2 es un circulo R_3 es un cilindro Se la grafica queda de la siguiente forma	

Inciso 9.b

Para poder encontrar las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto dado primero se debe de realizar el siguiente análisis	$x^2 + y^2 + z = 0$ $x^2 + y^2 = -z$ Se sabe que $x^2 = -z$ es una parábola $y^2 = -z$ es una parábola  $z = k$ $x^2 + y^2 = -k$ $-k > 0$ $k < 0$ conjunto de círculos paraboloide circular 
Para poder encontrar las coordenadas cilíndricas se debe de realizar el siguiente procedimiento	$P(-1,1,4)$ $(x, y, x) \rightarrow (r, \theta, z)$ $r^2 = (-1)^2 + (1)^2$ $r = \sqrt{2}$ $\theta = \tan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\theta r = -\frac{\pi}{4} + \pi$ $Z = Z$ **Respuesta** $puntos\ cilindricos\ (\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi, -4)$
Para poder encontrar las coordenadas esféricas se debe de realizar el siguiente procedimiento	$(x, y, x) \rightarrow (\rho, \theta, \emptyset)$ $\rho^2 = (-1)^2 + (1)^2 + (-4)^2$ $r = \sqrt{18}$ $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi$ $\emptyset = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) = 2.80\ rad$ **Respuesta** $Pesferico(\sqrt{18}, -\frac{\pi}{4} + \pi, 2.80\ rad)$

TEMA 10

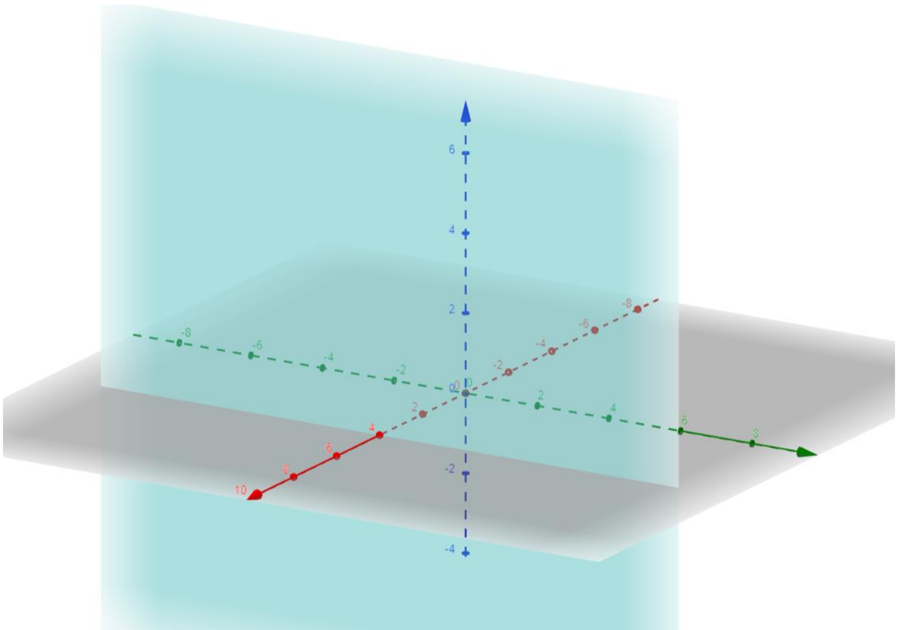
Inciso A

Para trasladar a coordenadas cartesianas se debe de realizar el siguiente procedimiento	i) $\rho = 4csc\emptyset sec\theta$ $\rho sen\emptyset cos\theta = 4$ $x = 4$ ii) $z = r^2 sen^2\theta$ $z = (rsen\theta)^2$ $z = y^2$ iii) $r = \sqrt{z}$ $x^2 + y^2 = z$ $x = 0 \quad y^2 = z$ $y = 0 \quad x^2 = z$ $z = k \quad x^2 + y^2$
La representación en R3 es la siguiente	i) Plano ii) Parábola en R2 (lamina) iii) Paraboloide circular

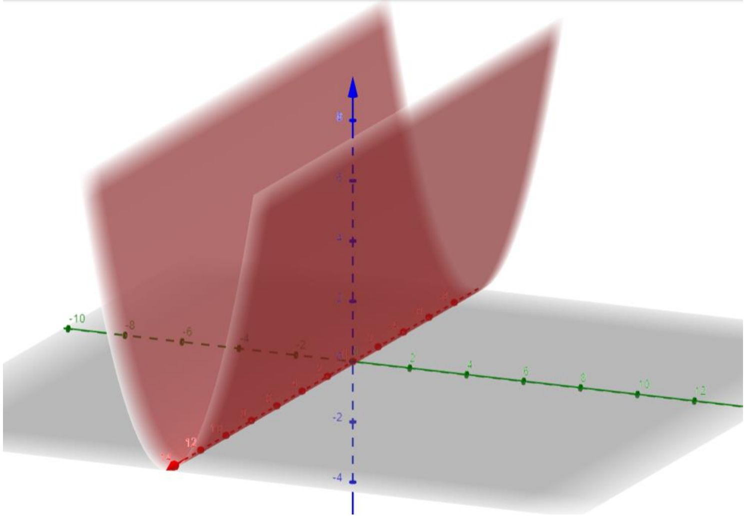
Inciso B

Representaciones graficas

i) X=4 esta representado de color celeste



ii) $Z = y^2$ esta representado de color rojo



iii) $x^2 + y^2 = z$ esta representado de color rojo