UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-4-V-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**20 de Noviembre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Manuel Andrés García Figueroa**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Manuel Andrés García Figueroa**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Intermedia 1**
Examen Final **Jornada Vespertina**

TEMA No 1 (15 puntos)

1.1 Encuentre el Radio y el Intervalo de Convergencia de la serie. Analice extremos del intervalo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$$

1.2 Obtenga una representación en series de potencias para la función $f(x) = \frac{4}{x-2}$ Utilícela para representar $F(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

TEMA No 2 (20 puntos)

Identifique y grafique la superficie (R^3) cuya ecuación se da

2.1 $z = lny$

2.2 $z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$

2.3 La parábola $z = 4y^2$, gira alrededor del eje Z. Escriba una ecuación de la superficie resultante en coordenadas cilíndricas, y dibújela.

TEMA No 3 (20 puntos)

3.1 Dadas las ecuaciones
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

a. Indique que representan en R^3

b. Encuentre la solución del sistema de ecuaciones anterior.

c. ¿Que representa la solución? Explique

3.2 Calcule la distancia perpendicular del punto $(-1,3,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $(1,1,-3)$ y $(5,1,-1)$, utilizando vectores.

TEMA No 4 (25 puntos)

Evalúe las siguientes integrales, (si es posible)

4.1 $\int \frac{2x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}\, dx$ 4.2 $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\, dx$ 4.3 $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$

TEMA No 5 (20 puntos)

5.1 Plantee una integral para calcular el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = \sqrt{1+4x}$; $1 \leq x \leq 5$ alrededor del eje X

5.2 Plantear la integral para el cálculo del área de la región dentro de $r = 1 + \cos\theta$ & fuera de $r = 1 - sen\,\theta$. (Trace la gráfica de la región).

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA No 1 (15 puntos)

1.1 Encuentre el Radio y el Intervalo de Convergencia de la serie. Analice extremos del intervalo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Por medio del criterio de la proporción, determinamos el intervalo de convergencia de la serie.	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{an+1}{an} \right\rvert < 1$
2.	Sustituyendo nuestra serie en el criterio de la proporción y determinando el intervalo de convergencia.	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{(x-2)^{n+1}(3)^n}{(3)^{n+1}(x-2)^n} \right\rvert < 1$ $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{(x-2)}{3} \right\rvert < 1$ $\left\lvert \frac{(x-2)}{3} \right\rvert < 1$ $-1 < \frac{x-2}{3} < 1$ $-3 < x-2 < 3$ $-1 < x < 5$
3.	Dado el intervalo de convergencia podemos determinar el valor de nuestro centro y el radio de convergencia-	$Radio\ r = 3$ $Centro\ c\ es\ x = 2$

R./ El centro de convergencia es x=2, el radio de convergencia es r=3 y el intervalo de convergencia es de -1<x<5

1.2 Obtenga una representación en series de potencias para la función $f(x) = \frac{4}{x-2}$ Utilícela para representar $F(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la serie geométrica de la función f(x) = $\frac{4}{x-2}$	$f(x) = \frac{4}{x-2}$ $f(x) = \frac{4}{-2-(-x)}$

		$f(x) = \dfrac{2}{-1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} -2\left(\frac{x}{2}\right)^n$
2.	Determinando la derivada de la función f(x)= $\frac{4}{x-2}$, para determinar su seríe geométrica y así determinar la serie de potencia que se asemeja a la función f(x)= $\frac{2}{(1-x)^2}$	$f(x) = \dfrac{2}{-1-\left(-\frac{x}{2}\right)}$ $f^1(x) = -2(-1)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}(-\frac{1}{2})$ $\sum_{n=0}^{\infty} -2n\left(\frac{x}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)$
3.	Dada la serie geométrica de la derivada de la función f(x)= $\frac{4}{x-2}$, se determina la serie de potencia.	$\sum_{n=0}^{\infty} -2n(x)^n$

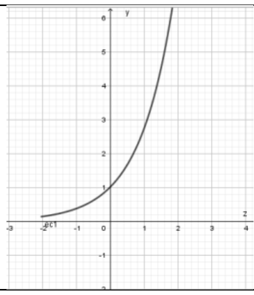
R./ La representación en series de potencias para la función$f(x) = \frac{4}{x-2}$, utilizándola para representar $F(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ es

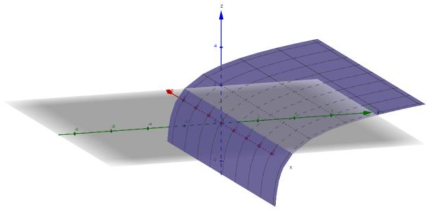
$$\sum_{n=0}^{\infty} -2n(x)^n$$

TEMA No 2 **(20 puntos)**

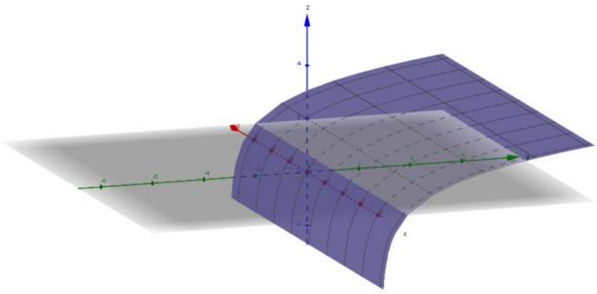
Identifique y grafique la superficie (R^3) cuya ecuación se da

2.1 $z = lny$

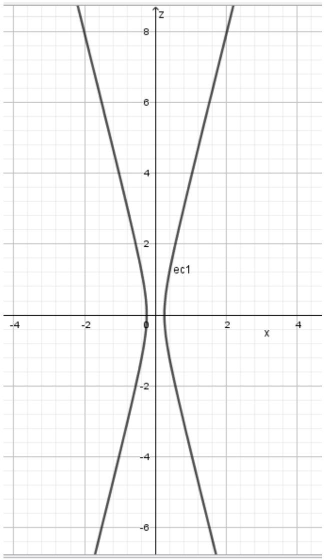
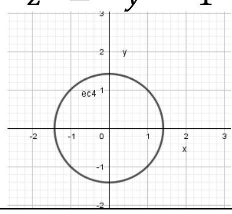
No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la función z = ln y, en el plano (z,y)	

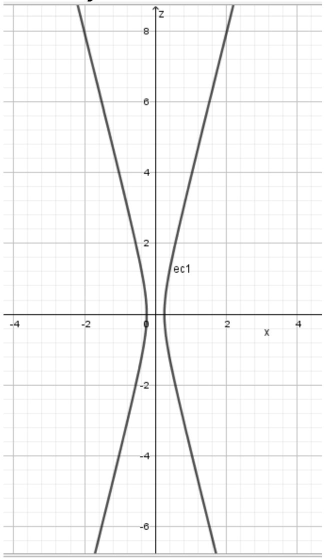
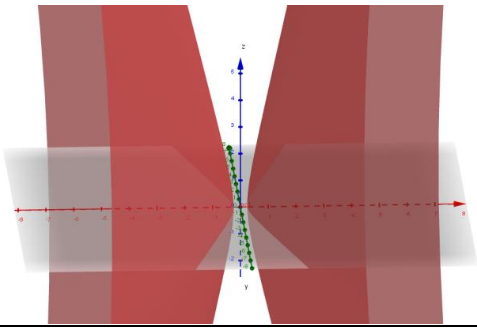
2.	Dado a que no existe un valor que determine el comportamiento en el plano x, se determina que dicho logaritmo se extiende en dicho plano obteniendo lo siguiente.	

R./ La función z=ln y es un logaritmo que se extiende en x y su gráfica es:

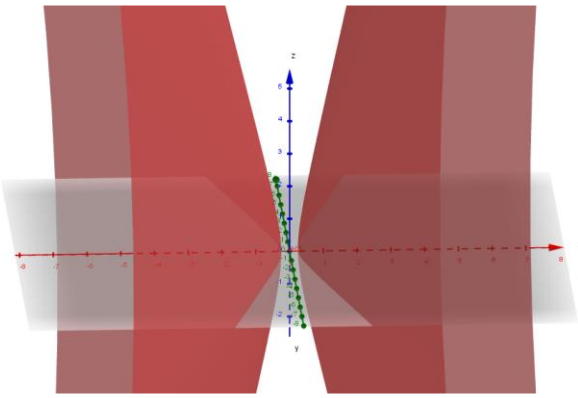


2.2 $z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$

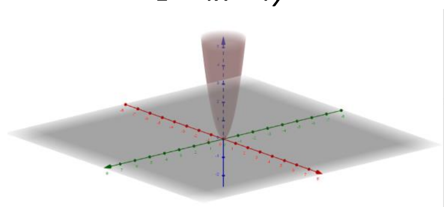
No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando y graficando la función en el plano xz cuando y=0. Formando una hipérbole.	$z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$ $z^2 = 4x^2 - 1$ $-z^2 + 4x^2 = 1$ 
2.	Determinando y graficando la función en el plano yz cuando existe un valor de n definido, determinando así que existe una circunferencia.	$z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$ $z^2 = -y^2 - 1$ 

3.	Determinando y graficando la función en el plano xy, cuando z=0. Determinando así que se forma una hipérbola.	$z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$ $y = 4x^2 - 1$ $-y^2 + 4x^2 = 1$ 
4.	Dadas las graficas encontradas en los puntos anteriores, podemos determinar que la figura $z^2 = 4x^2 - y^2 - 1$ es un hiperboloide. Obteniendo la siguiente gráfica.	

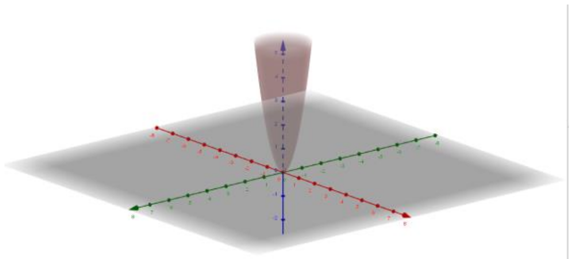
R/. La gráfica obtenida de la función $\boldsymbol{z^2 = 4x^2 - y^2 - 1}$ es un hiperboloide.



2.3 La parábola $z = 4y^2$, gira alrededor del eje Z. Escriba una ecuación de la superficie resultante en coordenadas cilíndricas, y dibújela.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Debido a que al momento de girar la función sobre el eje z se genera la misma función en el plano xz, se puede determinar que la superficie resultante es un paraboloide. Cumpliendo la siguiente ecuación.	$z = 4x^2+4y^2$ 
2.	Determinando la función en coordenadas cilíndricas. Y sustituyendo $r^2= x^2+y^2$	$z = 4x^2+4y^2$ $z = 4(x^2+y^2)$ $z=4r^2$

R/. La función al momento de girarla entorno al eje z es un paraboloide con la ecuación $z = 4x^2+4y^2$, en coordenadas cilíndricas es $z=4r^2$.



TEMA No 3 **(20 puntos)**

3.1 Dadas las ecuaciones $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$

a. Indique que representan en R^3

b. Encuentre la solución del sistema de ecuaciones anterior.

c. ¿Que representa la solución? Explique

No.	Explicación	Operatoria
1.	Tanto como la primer como la segunda ecuación representan planos en R3.	$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$

2.	El sistema no se puede resolver, debido a que para resolver un sistema de ecuaciones de 3 variables es necesario contar con 3 ecuaciones, dicho sistema únicamente cuenta con 2. Eso quiere decir, que el sistema cuenta con soluciones infinitas dado a que la intersección de dichos planos es una recta.	El sistema tiene infinitas soluciones. $\left\|\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right\| \; -F1+F2$ $\left\|\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right\| \; -F2/2$ $\left\|\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \end{array}\right\|$
3.	Debido a que la intersección de los dos planos representa una recta, y por ello tiene soluciones infinitas.	Debido a que la intersección de los dos planos representa una recta, y por ello tiene soluciones infinitas.

R./
a) Tanto como la primer como la segunda ecuación representan planos en R3.
b) El sistema tiene infinitas soluciones.
c) Debido a que la intersección de los dos planos representa una recta, y por ello tiene soluciones infinitas.

3.2 Calcule la distancia perpendicular del punto $A(-1,3,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $B(1,1,-3)$ y $C(5,1,-1)$, utilizando vectores.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando el vector director de los puntos B y C, $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC} = (5-1\,,1-1\,,-1-(.3))$ $\overrightarrow{BC} = (4{,}0{,}2)$
2.	Encontrando la recta paramétrica que pasa por el punto B y C. Utilizando el vector director $\overrightarrow{BC}$.	$x = 1+4t$ $y = 1+0t$ $z = -3+2t$
3.	Encontrando el vector director del punto $\overrightarrow{BC}$ y el punto A, al cual denominaremos $\vec{H}$.	$\vec{H} = (1+4t-(-1), 1-(3), -3+2t-(-1))$ $\vec{H} = (2+4t, -2. -2+2t)$
3.	Utilizando el producto punto entre $\overrightarrow{BC}$ y $\vec{H}$, e igualándola a 0, para poder determinar el valor del parámetro t que satisface que dicho vector director es perpendicular al punto C.	$\overrightarrow{BC} * A = (4{,}0{,}2) * (2+4t, -2. -2+2t)$=0 $8+16t+0-4+4t = 0$ $20t = -4$ $t = \frac{-1}{5}$

4.	Sustituyendo el valor de t en la ecuación paramétrica de la recta para determinar el punto perpendicular al punto A.	$x = 1 + 4\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{1}{5}$ $y = 1$ $z = -3 + 2\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{-17}{5}$ Punto D=$\left(\frac{1}{5}, 1, \frac{-17}{5}\right)$
5.	Calculando la distancia del punto A con el punto D.	$d = \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{5}\right)^2 + (3-1)^2 + \left(-1 - \left(\frac{-17}{5}\right)\right)^2}$ $d = \frac{2\sqrt{70}}{5}$

R./ La distancia del punto A, a la recta perpendicular de la recta generada por los puntos B y C, es de $d = \frac{2\sqrt{70}}{5}$

TEMA No 4 (25 puntos)

Evalúe las siguientes integrales, (si es posible)

4.1 $\int \frac{2x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}\, dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se rescribe la integral para poder realizarla por el método de fracciones parciales.	$\int \frac{2x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}\, dx = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
2.	Realizando la suma de las fracciones parciales para determinar el sistema de ecuaciones a resolver, para determinar las fracciones parciales.	$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$ $\frac{A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x+2)}{(x+2)(x-2)^2}$ $\frac{Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 - 4B + Cx + 2C}{(x+2)(x-2)^2}$ $\frac{x^2(A+B) + X(-2A+C) + 4A + 2C}{(x+2)(x-2)^2}$

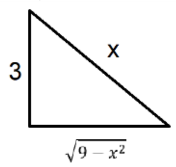
3.	Determinando el valor de A. B y C, por medio del sistema de ecuaciones generado por las fracciones parciales. Resolviendo el sistema de ecuaciones.	$(I)\ A+B=0$ $(II)\ -2A+C=0$ $(I)\ 4A+2C=0$ Resolviendo el sistema de ecuaciones: $A=-\frac{1}{2}$ $B=\frac{1}{2}$ $C=1$
4.	Sustituyendo los valores de A, B y C, para rescribir la integral. Resolviendo la integral.	$\int \frac{2x}{x^3-\ 2x^2-4x+8}\ dx=\int \frac{-1}{2(x+2)}dx+\int \frac{1}{2(x-2)}dx+\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$ $-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x-2)+\int \frac{1}{(x-2)^2}dx+C$
5.	Realizando la integral $\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$ por medio de una sustitución u=x-2, y resolviendo la integral.	$\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$ $u=x-2$ $du=dx$ $\int \frac{1}{(u)^2}du$ $-(u)^{-1}+C$ $-(x-2)^{-1}+C$
6.	Determinando la integral $\int \frac{2x}{x^3-\ 2x^2-4x+8}\ dx$	$\int \frac{2x}{x^3-\ 2x^2-4x+8}\ dx=-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x-2)-(x-2)^{-1}+C$

R/

$$\boldsymbol{\int \frac{2x}{x^3-\ 2x^2-4x+8}\ dx=-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x-2)-(x-2)^{-1}+C}$$

4.2 $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\ dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizando la integral por medio de sustitución trigonométrica x=aSen(θ).	$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\ dx$ $x=3Sen(\theta)$ $\mathrm{d}x=3Cos(\theta)\ d\theta$

2.	Sustituyendo $x = 3Sen(\theta)$ $dx = 3Cos(\theta)\,d\theta$ y simplificando la integral. Además, se sustituye $1 - Sen^2\theta = Cos^2\theta$.	$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx=$ $\int \frac{(3Sen\theta)^2 Cos\theta}{(9-(3Sen\theta)^2)^{3/2}}\,d\theta =$ $\int \frac{9Sen^2\theta Cos\theta}{(9-9Sen^2\theta)^{3/2}}\,d\theta =$ $\int \frac{9Sen^2\theta Cos\theta}{9(1-Sen^2\theta)^{3/2}}\,d\theta =$ $\int \frac{Sen^2\theta Cos\theta}{(Cos^2\theta)^{3/2}}\,d\theta = \int \frac{Sen^2\theta Cos\theta}{(Cos^2\theta)^{3/2}}\,d\theta$ $\int \frac{Sen^2\theta Cos\theta}{Cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta}\,d\theta$
3.	Sustituyendo $tan^2\theta = \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta}$; y sustituyendo $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$	$\int \frac{Sen^2\theta}{Cos^2\theta}\,dx = \int tan^2\theta =$ $\int (Sec^2\theta - 1)d\theta$
4.	Resolviendo la integral y realizando la sustitución trigonométrica.	$\int (Sec^2\theta - 1)d\theta = tan\theta - \theta + C$  $= \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + Sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

R/.

$$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + Sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

4.3 $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Resolviendo la integral por el método de integración de sustitución por partes, utilizando $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$.	$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$ $du = dx \qquad v = -e^{-x}$ $\int x\,e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx =$ $-xe^{-x} - e^{-x} + C$

2.	Sustituyendo a=∞ y evaluando el límite cuando $a \to \infty$, para determinar el valor de la integral definida.	$\lim_{a\to\infty} \int_0^a x\, e^{-\,x}\ \ dx =$ $\lim_{a\to\infty} \lvert -xe^{-x} - e^{-x} \rvert_0^a =$ $\lim_{a\to\infty} \lvert -ae^{-a} - e^{-a} \rvert - \left(-(0)e^{-(0)} - e^{-(0)}\right)$ $\lim_{a\to\infty} \lvert -ae^{-a} - e^{-a} \rvert - (-1)$
3.	Aplicando las reglas de evaluación de límites cuando a tiende a ∞. Aplicando L´Hopital.	$\lim_{a\to\infty} \lvert -ae^{-a} - e^{-a} \rvert = \frac{0}{0} - 0$ $\lim_{a\to\infty} \left\lvert -ae^{-a} - \lim_{a\to\infty} e^{-a} \right\rvert = \frac{0}{0} - 0$ $\lim_{a\to\infty} \frac{1}{-e^{a}} - \lim_{a\to\infty} e^{-a} = 0$ $=> \int_0^{+\infty} x\, e^{-\,x}\ \ dx = 0 - (-1) = 1$

R/

$$\int_0^{+\infty} \boldsymbol{x\, e^{-\,x}\ \ dx = 1}$$

TEMA No 5 **(20 puntos)**

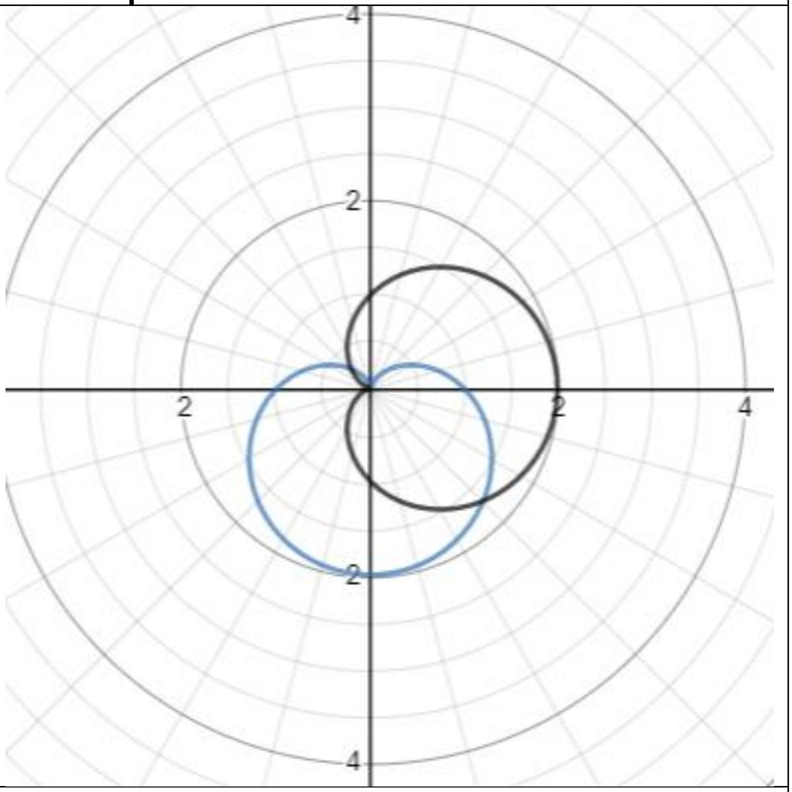
5.1 Plantee una integral para calcular el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = \sqrt{1+4x}$; $1 \le x \le 5$ alrededor del eje X

No.	Explicación	Operatoria
1.	Derivamos la función f(x)= $\sqrt{1+4x}$	f(x)= $\sqrt{1+4x}$ $f^1(x) = -\frac{1}{2}(1+4x)^{-1/2}$
2.	Utilizando la forma de la integral $\int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ Y sustituyendo los valores de y y su derivada, además de su intervalo.	$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$ $\int_1^5 2\pi(\sqrt{1+4x}\ )\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}(1+4x)^{-1/2}\right)^2}\, dx$

R/. La integral que define el área superficial de la figura es:

$$S = \int_1^5 2\pi(\sqrt{1+4x}\ )\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}(1+4x)^{-1/2}\right)^2}\,dx$$

5.2 Plantear la integral para el cálculo del área de la región dentro de $r = 1 + \cos\,\theta$ & fuera de $r = 1 - sen\,\theta$. (Trace la gráfica de la región).

No.	Explicación	Operatoria
1.	Determinando la gráfica de las dos funciones para delimitar el área a encontrar.	
2.	Encontrando los puntos de intersección entre las dos funciones, aplicando simetría.	$r1 = r2$ $1+\cos\theta = 1 - sen\,\theta$ $\cos\theta = -sen\,\theta$ $\frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = -1$ $\tan\theta = -1$ $tan^{-1}(-1) = \theta = -\frac{\pi}{4}$
3.	Utilizando simetría, los puntos de intersección son.	$\theta 1 = \frac{7\pi}{4}$ $\theta 2 = \frac{11\pi}{4}$

4.	Determinando las integrales para el cálculo del área dentro de las dos curvas polares, Utilizando A= $\frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$	$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{4}} (1+\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{4}} (1-\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$

R/.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{4}} (1+\cos\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{11\pi}{4}} (1-\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$$