UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-6-M-2-00-2019-sC

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**110**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**22 de enero de 2020**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Erick Steven Lool Rodríguez**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Erick Steven Lool Rodríguez**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Segundo Semestre 2019**
Facultad de Ingeniería **Segunda Retrasada**
Departamento de Matemática **Jornada Matutina**
Matemática Intermedia 1 **TEMARIO A** **22/01/2020**

Tema 1 (10 Puntos): Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta L1 y es perpendicular a L2.

$$L1:\ \ x = 3 + S; y = 5 + 2S; z = -1 - 5S$$

$$L2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

Tema 2 (10 Puntos):
a) Usando vectores, encontrar la distancia del punto A (1,2,3) al plano P1.

$$P1:\ \ 2x - 3y + z = 4$$

b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al plano P1.

Tema 3 (10 Puntos): Encontrar los valores de "k" para los cuales el sistema tenga:

a. Única solución.
b. Infinitas soluciones.
c. No tenga solución.

$$x - 2y + 3z = 2$$
$$x + y + z = k$$
$$2x - y + 4z = k^2$$

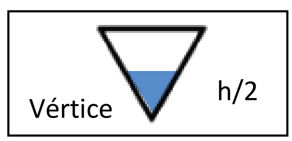
Tema 4(10 Puntos):
En su bolsillo usted tiene monedas de 5, 10 y 25 centavos. En total tiene 20 monedas y exactamente el doble de monedas de 10 centavos que de cinco. El valor total de las monedas de Q3.00. Encuentre el número de monedas de cada tipo (resuelva el sistema usando el método de Gauss Jordan).

Tema 5 (10 Puntos):
Resuelva las siguientes integrales:

a. $\int_1^e \sqrt{x} \ln x \; dx$

b. $\int \frac{dy}{(y^2+y+1)^2}$ **c.** $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x \, dx$

Tema 6 (10 Puntos):
Una pileta se llena a la mitad de su altura con un líquido de densidad 1,000 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros invertidos con lados de 6 m de largo y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta (véase la figura).



Tema 7 (10 Puntos): Dada las siguientes funciones:

$r_1(\theta) = 3\cos 2\theta \;\; (0 \le \theta \le \frac{\pi}{4})$

$r_2(\theta) = 2 \qquad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ &

$r_3(\theta) = 3\sin\theta \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$

a) Graficar en un mismo plano (hacer una gráfica grande, entendible y detallada).
b) Plantear el área en común a las 3 funciones en el intervalo establecido.

Nota: $\cos 2\theta = 1 - 2sin^2\theta$

Tema 8 (10 Puntos):
Dada la:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

a) Encontrar la serie de potencias centrada en cero usando la serie geométrica o Maclaurin.
b) Encontrar el radio e intervalo abierto de convergencia usando criterio del cociente.

Tema 9 (10 Puntos): Dada las siguientes ecuaciones paramétricas:
$x(t) = 2\cos 2t$ & $y(t) = 4 - 4\cos^2 t \quad 0 \le t \le \pi/2$

Tema 10 (10 Puntos):
Identifique y grafique en R^3.

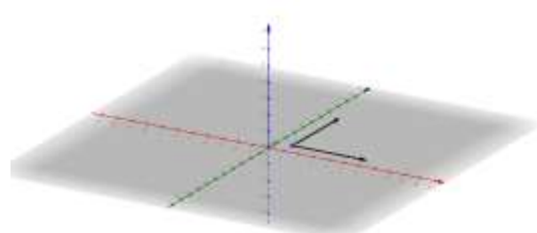
a. $y^2 = x^2 + z^2$

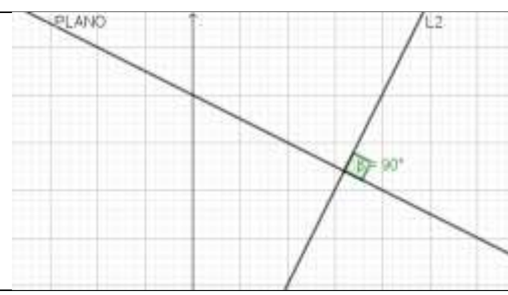
a) Hacer la gráfica en el intervalo establecido y colocar el direccionamiento del recorrido. b) Plantear el área superficial en paramétricas si se hace girar alrededor del eje “y”. **c)** Eliminar el parámetro y escribirla en forma cartesiana.	b. $r = 3\cos\theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ c. $\rho = \pi$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (10 Puntos): Encontrar la ecuación del plano que contiene a la recta L1 y es perpendicular a L2.

$$L1: \; x = 3 + S; y = 5 + 2S; z = -1 - 5S$$
$$L2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero tendremos que definir una variable de parametrización para la recta L2, que en este caso yo le llamaré “t”. Seguido de ello, se necesita encontrar “x”, “y”, “z” en función de esta variable.	$t = \frac{x+1}{1}$ $x = t - 1$ $t = \frac{y-2}{2}$ $y = 2t + 2$ $t = \frac{z+3}{1}$ $z = t - 3$
2.	Para que se cumplan las condiciones que nos plantea el problema, necesitamos saber que un plano que contenga a L1 y sea perpendicular a L2, queda ejemplificado de la siguiente manera:	
3.	Para poder construir la ecuación de nuestro plano se necesita un vector normal al mismo y un punto donde esté contenido.	$Vnormal_{Plano} = Vdirector_{L2}$

	En este caso el vector director de nuestra recta L2, es un vector normal a nuestro plano.	$Vnormal_{Plano} =< 1{,}2{,}1 >$
4.	Un punto que esté contenido en el plano lo encontramos con la ayuda de la recta L1, para ello simplificaremos trabajo y hacemos que S=0.	$S = 0$ $x = 3, y = 5, z = -1$ $P(3{,}5, -1)$
5.	Posteriormente necesitamos la ecuación general de un plano que es la siguiente:	$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + \mathrm{d} = 0$ $Donde\ a, b, c\ es\ el\ vector\ normal\ del\ plano$
6.	Sustituimos el vector y el punto que encontramos en nuestra ecuación, para encontrar el valor de nuestra constante “d”:	$1(3) + 2(5) + 1(-1) + \mathrm{d} = 0$ $d = 12$
7.	Finalmente, la ecuación de nuestro plano es:	$x + 2y + z = 12$
8.	Podemos hacer z=0, para comprobar en el plano XY.	$z = 0$ $Plano: x + 2y = 12, y = 12 - \frac{1}{2}x$ $L2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2}; y = 2x + 4$
9.	Graficamos y vemos que se cumple, también se puede verificar con las pendientes.	

$$R/ \rightarrow x + 2y + z = 12$$

Tema 2 (10 Puntos):

a) Usando vectores, encontrar la distancia del punto A (1,2,3) al plano P1.

$$P1: \ 2x - 3y + z = 4$$

b) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al plano P1.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Adicional al punto que nos brinda el problema, necesitamos otro que pertenezca al plano para formar un vector, por lo tanto:	$Sea\ P_B(x_{o,}y_o, z_o)$ $BA = < 1 - x_o, 2 - y_o, 3 - z_o >$
2.	Para encontrar la distancia usaremos componentes, en este caso el otro vector, es el vector normal (coeficientes que acompañan a las variables "x", "y", "z" en la ecuación) del plano que pasa por el punto A, por tanto encontraremos la componente de "b" sobre "n".	$D = \|comp_n b\| = \frac{\|n \cdot b\|}{\|n\|}$
3.	Posteriormente, se procede a encontrar la magnitud del vector "n" y el producto punto entre "n" y "b".	$\|n\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$ $\|n\| = \sqrt{14}$ $\|n \cdot b\| = \|2(1 - x_o) + (-3)(2 - y_o) + (3 - z_o)\|$ $\|n \cdot b\| = \|2(1 - x_o) - 3(2 - y_o) + (3 - z_o)\|$
4.	Ya que el punto $(x_{o,}y_o, z_o)$ pertenece al plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano y por lo tanto, tenemos que $ax_o + by_o + cz_o + d = 0$ y el resultado del producto punto es:	$\|n \cdot b\| = \|2(1) - 3(2) + (3)\|$ $\|n \cdot b\| = 1$
5.	Por lo tanto, nuestra distancia es:	$D = \frac{1}{\sqrt{14}}\ u$
6.	INCISO B La forma de nuestra recta debe ser la siguiente:	$x = x_o + at; \quad y = y_o + bt; \quad z = z_o + ct$
7.	El vector director de nuestra recta es el vector normal del plano y ya tenemos un punto que pase por la recta, por lo tanto nuestra recta es:	$L_{perpendicular}: \ x = 1 + 2t; \quad y = 2 - 3t; \ \ z = 3 + z$

8.	Para comprobarlo podemos hacer z=0; formar la ecuación de la recta y el plano en el plano XY y la multiplicación de las pendientes debe ser -1.	$Plano: \quad 2x - 3y = 4; \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ $Recta: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}; \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ $m_{plano} * m_{recta} = -1$ $\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1; \quad sí\ son\ perpendiculares$

R./

$$a) \qquad D = \frac{1}{\sqrt{14}}\, u$$

$$b) \qquad Recta_{perpendicular}:\ x = 1 + 2t; \quad y = 2 - 3t; \quad z = 3 + z$$

Tema 3 (10 Puntos): Encontrar los valores de "k" para los cuales el sistema tenga:

a. Única solución.
b. Infinitas soluciones.
c. No tenga solución.

$$x - 2y + 3z = 2$$
$$x + y + z = k$$
$$2x - y + 4z = k^2$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Para abordar este problema es necesario hacer usado de eliminación por Gauss para la última variable, ya que ella nos dará las condiciones para cada caso.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 4 & k^2 \end{array}\right)$
2.	Comenzaremos por eliminar la primera posición de la segunda y tercera fila.	$F_2 \to F_2 - F_1$ $F_3 \to F_3 - 2F_1$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & k-2 \\ 0 & 3 & -2 & k^2-4 \end{array}\right)$
3.	Posteriormente, procedemos a eliminar la segunda posición de la tercera fila.	$F_3 \to F_3 - F_2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-4-k+2 \end{array}\right)$
4.	En esta parte es donde veremos cuáles condiciones hacen que se tenga infinitas soluciones, ninguna y exactamente una solución, para ello se toma la última fila.	$k^2 - 4 - k + 2 = 0$ $k^2 - k - 2 = 0$ $(k-2)(k+1) = 0$ $k = 2;\ k = -1$
5.	Para este caso, como el coeficiente de la variable "z" siempre será cero, no existe ningún valor k tal que el sistema tenga única solución.	$No\ existe\ valor\ de\ k$
6.	Para que tenga infinitas soluciones, la última fila debe ser completamente de ceros, para ello los valores que cumplen son:	$k = 2;\ k = -1$
7.	Para que no tenga ninguna solución es necesario que el coeficiente de la variable "z" sea cero e igualado a una constante diferente de cero, con ello los valores que cumplen son:	$k \neq 2;\ k \neq -1$

R./ a) $No\ existe\ valor\ de\ k$

b) $k = 2; k = -1$

c) $k \neq 2; k \neq -1$

Tema 4(10 Puntos):

En su bolsillo usted tiene monedas de 5, 10 y 25 centavos. En total tiene 20 monedas y exactamente el doble de monedas de 10 centavos que de cinco. El valor total de las monedas de Q3.00. Encuentre el número de monedas de cada tipo (resuelva el sistema usando el método de Gauss Jordan).

No	**EXPLICACION**	**OPERATORIA**
1.	Inicialmente debemos plantear cuáles serán nuestras variables a encontrar y qué representa cada uno, lo que necesitamos es saber número de monedas de cada tipo, por lo que se tiene:	$x = \#\ de\ monedas\ de\ 5\ centavos$ $y = \#\ de\ monedas\ de\ 10\ centavos$ $z = \#\ de\ monedas\ de\ 25\ centavos$
2.	La primera ecuación se plantea con el número total de monedas.	$x + y + z = 20$
3.	La segunda ecuación se plantea con el total en quetzales que tenemos, tomando en cuenta el valor neto que tendría cada moneda.	$0.05x + 0.1y + 0.25z = 3$
4.	Para la última ecuación nos dan una relación entre las monedas de 10 centavos y de 5 centavos.	$y = 2x \quad \rightarrow \quad 2x - y = 0$
5.	Teniendo nuestras 3 variables con nuestras 3 ecuaciones, planteamos nuestra matriz para usar el método de Gauss Jordan	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0.05 & 0.1 & 0.25 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$
6.	Para facilitar el procedimiento, multiplicaremos por 100 toda la segunda fila.	$F_2 \rightarrow 100F_2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 5 & 10 & 25 & 300 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

7.	Comenzaremos por eliminar la primera posición de la segunda y tercera fila.	$F_2 \to F_2 - 5F_1$ $F_3 \to F_3 - 2F_1$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 20 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -40 \end{array}\right)$
8.	Procedemos con la segunda posición de la tercera fila.	$F_3 \to 5F_3 + 3F_2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 20 & 200 \\ 0 & 0 & 50 & 400 \end{array}\right)$
9.	El método de eliminación Gauss Jordan tiene una matriz identidad donde se encuentran los coeficientes de las variables, por tal, a la tercer fila se le realiza la siguiente operatoria:	$F_3 \to \frac{1}{50} F_3$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 20 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$
10.	Ahora se realiza el proceso pero de manera inversa, de abajo hacia arriba, por lo que se eliminará la tercera posición de la segunda y primera fila.	$F_2 \to F_2 - 20F_3$ $F_1 \to F_1 - F_3$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$
11.	De la misma manera que realizamos en la tercer fila, se deja el coeficiente de la variable de la segunda fila con un valor de 1.	$F_3 \to \frac{1}{5} F_3$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$
12.	Por último se elimina la segunda posición de la primera fila.	$F_1 \to F_1 - F_2$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$

La solución a nuestro problema es:

Hay 4 monedas de 5 centavos, 8 monedas de 10 centavos y 8 monedas de 25 centavos.

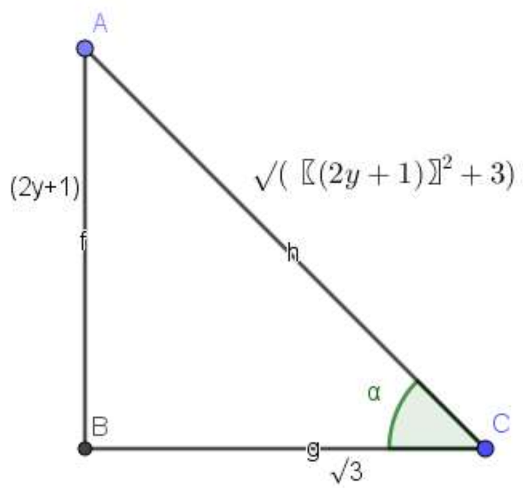
X=4 monedas; Y=8 monedas; Z=8 monedas.

Tema 5 (10 Puntos):

Resuelva las siguientes integrales:

a. $\int_1^e \sqrt{x}\ln x\, dx$ b. $\int \frac{dy}{(y^2+y+1)^2}$ **c.** $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x\, dx$

No.	Explicación	Operación
1.	INCISO A Para darle solución, usaremos el método de integración por partes.	$\int udv = uv - \int vdu$
2.	Identificamos cual será nuestra "u" y cual será nuestro "dv", para estos casos lo que se busca es simplificar nuestro trabajo.	$u = Ln(x)$ $dv = \sqrt{x}dx$
3.	Derivamos nuestra "u" e integramos nuestro "dv" lo que nos da como resultado.	$\mathrm{du} = \frac{1}{x}dx$ $v = \frac{2}{3}x^{3/2}$
4.	Sustituyendo	$\int Ln(x)\sqrt{x}\, dx = Ln(x)\frac{2}{3}x^{3/2} - \int \frac{2x^{3/2}}{3x}dx$
5.	Por último debemos trabajar la integral:	$\int \frac{2x^{3/2}}{3x}dx = \frac{2x^{1/2}}{3}dx = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{3/2} = \frac{4}{9}x^{3/2}$
6.	Por lo que nuestra respuesta es la siguiente:	$\int Ln(x)\sqrt{x}\, dx = Ln(x)\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{9}x^{3/2} + c$

7.	INCISO B Esta integral la resolveremos por el método de sustitución trigonométrica	$\int \frac{dy}{(y^2+y+1)^2}$
8.	Inicialmente necesitamos completar cuadrados en el denominador, por lo que únicamente se descompone de la siguiente manera:	$\left(y^2+y+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{(2y+1)^2+3}{4}\right)^2$
9.	Sustituimos en la integral:	$\int \frac{dy}{\left(\frac{(2y+1)^2+3}{4}\right)^2} = \int \frac{16dy}{((2y+1)^2+3)^2}$
10.	Usaremos la sustitución trigonométrica ubicando en un triángulo nuestro catetos, quedando así:	
11.	Para realizar la sustitución tenemos que encontrar nuestro "dy" en función de α.	$\frac{op}{ad} = \tan(\alpha) = \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}\tan(\alpha)-1}{2}$ $dy = \frac{\sqrt{3}}{2}sec^2(\alpha)d\alpha$
12.	También tenemos que trabajar con el denominador:	$\frac{hip}{ad} = \sec(\alpha) = \frac{\sqrt{(2y+1)^2+3}}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{(2y+1)^2+3}}{\sqrt{3}} = \sec(\alpha) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{(2y+1)^2+3}}{\sqrt{3}}\right)^4 = sec^4(\alpha)$ $((2y+1)^2+3)^2 = 9sec^4(\alpha)$

13.	Teniendo nuestra nueva variable lo sustituimos en la integral:	$\int \frac{\frac{16\sqrt{3}}{2} sec^2(\alpha)d\alpha}{9sec^4(\alpha)} = \int \frac{8\sqrt{3}d\alpha}{9sec^2(\alpha)} = \int \frac{8\sqrt{3}}{9}\cos^2(\alpha)d\alpha$
14.	Posteriormente usaremos la siguiente identidad y lo sustituimos en la integral:	$cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2}$ $\frac{8\sqrt{3}}{9}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2}\right) d\alpha$
15.	Se separa en dos integrales:	$\frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{2} d\alpha + \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \left(\frac{\cos(2\alpha)}{2}\right) d\alpha$
16.	La primer integral sale de manera directa:	$\int \frac{4\sqrt{3}}{9} d\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{9}\alpha$
17.	En la segunda necesitamos una nueva y última sustitución, con lo cual nos queda una integral directa.	$u = 2\alpha \quad \rightarrow \quad du = 2d\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = d\alpha$ $\frac{8\sqrt{3}}{9(2)(2)}\int \cos(u)\, du = \frac{2\sqrt{3}}{9} sen(u)$
18.	Se regresa a la variable α	$\frac{2\sqrt{3}}{9} sen(u) = \frac{2\sqrt{3}}{9} sen(2\alpha)$
19.	Ahora que ya tenemos la respuesta es necesario dejarla en términos de la variable original:	$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)$
20.	Por lo que nuestra respuesta es la siguiente:	$\int \frac{dy}{(y^2+y+1)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9} sen\left(2tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c$

21.	INCISO C En este caso tenemos una integral definida, por lo que nos debe quedar un valor puntual, para darle solución solo es de hacerle unos arreglos algebraicos y sustitución.	$\int_0^{\pi/4} sec^4(x)dx$
22.	Por ser una integral trigonométrica par, podemos hacer lo siguiente para facilitar el procedimiento:	$\int_0^{\pi/4} sec^2(x)sec^2(x)dx$
23.	Realizamos una sustitución con la identidad siguiente:	$sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$ $\int_0^{\pi/4} [1 + tan^2(x)]sec^2(x)dx$
24.	Hacemos una sustitución de "u", incluyendo los límites de integración.	$u = \tan(x) \quad \rightarrow \quad du = sec^2(x)dx$ $u_{inf} = \tan(0) = 0 \quad \rightarrow \quad u_{sup} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\int_0^1 (1 + u^2)du = u + \frac{u^3}{3}$
25.	Sustituimos nuestros límites en nuestra respuesta:	$\left[1 + \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[0 + \frac{(0)^3}{3}\right] = \frac{4}{3}$
26.	Nuestra integral definida queda:	$\int_0^{\pi/4} sec^4(x)dx = \frac{4}{3}$

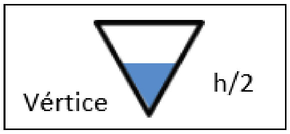
$$a) \int Ln(x)\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}Ln(x) * x^{3/2} - \frac{4}{9}x^{3/2} + c$$

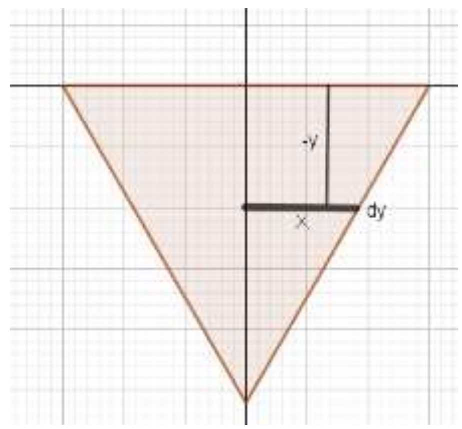
$$b) \int \frac{dy}{(y^2 + y + 1)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} tan^{-1}\left(\frac{2y + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9} sen\left(2tan^{-1}\left(\frac{2y + 1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c$$

$$c) \int_0^{\pi/4} sec^4(x)dx = \frac{4}{3}$$

Tema 6 (10 Puntos):

Una pileta se llena a la mitad de su altura con un líquido de densidad 1,000 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros invertidos con lados de 6 m de largo y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo



NO.	EXPLICACIÓN	OPERACIÓN
1.	Necesitamos saber que para calcular la fuerza hidrostática, hay que encontrar una altura y un diferencial de área.	$F = \rho g \int h(y)L(y)dy$ $\mathrm{g} = 9.8\dfrac{m}{s^2};\ \rho = 1000\dfrac{kg}{m^3}$
2.	Seguido, necesitamos ubicarnos en un eje coordenado, que nos ayude a visualizar la situación.	
3.	Para la altura h(y), es únicamente la distancia hasta el diferencial "dy"	$\mathrm{h(y)} = -\mathrm{y}$
4.	Para encontrar la altura de nuestro triángulo se puede usar la ecuación siguiente (o Pitágoras):	$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(6) = 3\sqrt{3}$ $h = \sqrt{6^2 - 3^2 = 3\sqrt{3}}$
5.	Para dejar "x" en términos de la variable de interés, es necesario hallar la recta que limita uno de los lados, usando los puntos, con ello encontraremos la pendiente :	$P_1(3,0) \quad \& \quad P_2(0,-3\sqrt{3})$ $m = \dfrac{0-(-3\sqrt{3})}{3-0} = \sqrt{3}$

6.	Con la pendiente y un punto, formamos nuestra recta y despejamos "x"	$P_2(0,-3\sqrt{3})$ $y-(-3\sqrt{3})=\sqrt{3}x$ $x=\dfrac{y+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
7.	Nuestro L(y) es nuestra "x" por un diferencial "dy"	$L(y)=\dfrac{y+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
8.	Nuestros límites de integración se plantean hasta donde se encuentre la altura del líquido.	$y_{inf}=-3\sqrt{3}$ & $y_{sup}=\dfrac{-3}{2}\sqrt{3}$
9.	Para la integral consideramos únicamente la mitad, por simetría se multiplica por 2.	F $=2(9.8)(1000)\int_{-3\sqrt{3}}^{-(3\sqrt{3})/2}(-y)\left(\dfrac{y+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)dy$
10.	La resolvemos por medio de una calculadora y la respuesta es:	$F=132{,}300\ N$

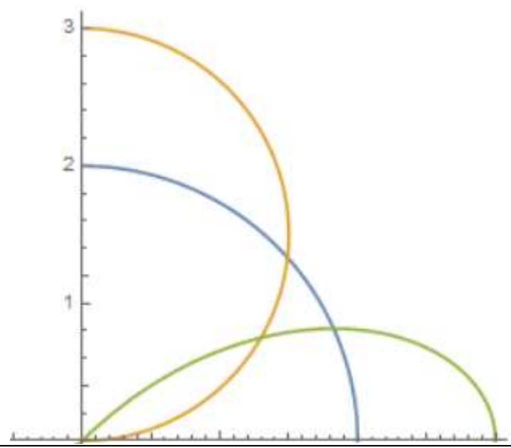
$$\boxed{F=132{,}300N}$$

Tema 7 (10 Puntos): Dada las siguientes funciones:

$r_1(\theta)=3\cos 2\theta\ \ (0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$; $\quad r_2(\theta)=2\ \ \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ & $r_3(\theta)=3\sin\theta\ \ \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

a) Graficar en un mismo plano (hacer una gráfica grande, entendible y detallada).
b) Plantear el área en común a las 3 funciones en el intervalo establecido.

Nota: $\cos 2\theta=1-2sin^2\theta$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>INCISO A
Inicialmente debemos considerar que curvas polares estamos por graficar, para que de esa manera seamos capaces de realizarla lo más detallada posible, tomaremos el intervalo que nos dan y lo dividiremos en 3 puntos:</td><td>
<table>
<tr><td>θ</td><td>0</td><td>$\pi/4$</td><td>$\pi/2$</td></tr>
<tr><td>r_1</td><td>3</td><td>0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>r_2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>r_3</td><td>0</td><td>$3\sqrt{2}$</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>La primer curva es una flor de 4 pétalos (la cual tiene un recorrido descendente de 0 a $\pi/4$), la segunda es una circunferencia centrada con radio igual a 2 y la tercera es un circunferencia desplazada 3 unidades hacia arriba del eje x, con ello realizamos el inciso a.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>INCISO B
Para plantear el área en común a las 3 funciones, tenemos que encontrar las intersecciones, viendo por medio del paso 2, hay 3 intersecciones entre las siguientes curvas.</td><td>$r_2 \ y \ r_1; \quad r_3 \ y \ r_1 \quad \& \quad r_2 \ y \ r_3$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Intersección entre $r_2 \ y \ r_1$</td><td>$$2 = 3\cos(2\theta)$$ $$\frac{2}{3} = \cos(2\theta)$$ $$\theta = \frac{1}{2}cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$ $$\theta_1 = 0.4205$$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Intersección entre $r_3 \ y \ r_1$</td><td>$$3sen(\theta) = 3\cos(2\theta)$$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Para este caso haremos uso de la nota que nos proporciona el problema:</td><td>$$3\mathrm{sen}(\theta) = 3(1 - 2sen^2(\theta))$$</td></tr>
</table>

7.	Hacemos la siguiente sustitución:	$u = sen(\theta)$ $3u = 3 - 6u^2$ $6u^2 + 3u - 3 = 0$
8.	Resolvemos la ecuación y factorizada es lo siguiente:	$(2u + 2)(2u - 1) = 0$ $u = -1 \quad \& \quad u = \frac{1}{2}$
9.	Regresamos a la variable original y encontramos nuestro segundo punto de intersección:	$-1 = sen(\theta_2) \quad \theta_2 = sen^{-1}(-1) \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{2} = sen(\theta_2) \quad \theta_2 = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6}$
10.	El punto de intersección de nuestro interés es $\frac{\pi}{6}$ ya que el otro no cumple en el intervalo establecido	$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$
11.	Intersección entre r_3 y r_2	$3sen(\theta_3) = 2$ $\frac{2}{3} = sen(\theta_3)$ $\theta_3 = sen^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ $\theta_3 = 0.7297$
12.	Teniendo nuestros puntos de intersección solo queda plantear nuestra área:	$A = \frac{1}{2}(\int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_2 - r_1)^2 dr + \int_{\theta_2}^{\theta_3} (r_2 - r_3)^2 dr$
13.	El área es la siguiente:	$A = \frac{1}{2}(\int_{0.4205}^{\pi/6} (2 - 3cos(2\theta))^2 dr + \int_{\theta_2}^{\theta_3} (2 - 3sen(\theta))^2 dr$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(\int_{0.4205}^{\pi/6} (2 - 3cos(2\theta))^2 dr + \int_{\theta_2}^{\theta_3} (2 - 3sen(\theta))^2 dr}$$

Tema 8 (10 Puntos):

Dada la:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

a) Encontrar la serie de potencias centrada en cero usando la serie geométrica o Maclaurin.
b) Encontrar el radio e intervalo abierto de convergencia usando criterio del cociente.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1	INCISO A Debido a la forma que posee la función se puede hacer una analogía con la expresión de la sumatoria de una serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$
2	Por lo tanto, la función debe cumplir la siguiente característica	$f(x) = \frac{a}{1-r}$ $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{1-(-x)}$
3	Donde tenemos lo siguiente:	$a = 1; \quad r = -x$
4	Por lo que la serie de potencia es:	$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad$ ó $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x)^n$
5	INCISO B El criterio del cociente establece lo siguiente:	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| < 1$
6	El a_n en este caso es $(-x)^n$	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(-x)^{n+1}}{(-x)^n} \right\| < 1$ $\lim_{n\to\infty} \|(-x)\| < 1$
7	Como no tenemos ningún término "n" el limite cuando tiene a infinito sigue siendo constante, en este caso se resume a lo siguiente:	$\|x\| < 1$
8	Como se puede notar en la expresión anterior el radio de la serie es 1, ya que el coeficiente de nuestra variable es 1	$R_{convergencia} = 1$

9	Para encontrar el intervalo de convergencia se aplica en concepto del valor absoluto y tenemos:	$-1 < x < 1$
10.	Intervalo de convergencia	(-1,1)

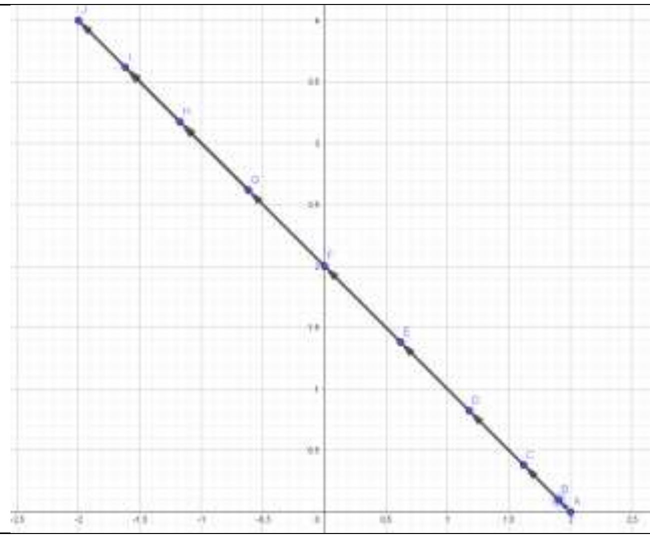
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \quad \text{ó} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x)^n$$
$$R_{convergencia} = 1$$
$$I_{convergencia} = (-1{,}1)$$

Tema 9 (10 Puntos): Dada las siguientes ecuaciones paramétricas:

$x(t) = 2\cos 2t$ & $y(t) = 4 - 4\cos^2 t \quad 0 \le t \le \pi/2$

a) Hacer la gráfica en el intervalo establecido y colocar el direccionamiento del recorrido.
b) Plantear el área superficial en paramétricas si se hace girar alrededor del eje "y".
c) Eliminar el parámetro y escribirla en forma cartesiana.

No	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1	INCISO A Para realizar la gráfica en el intervalo que nos brinda el problema debemos dividirlo en 10 pasos para saber cómo será el recorrido.	<table><tr><th>t</th><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>$\frac{\pi}{20}$</td><td>1.902</td><td>0.097</td></tr><tr><td>$\frac{\pi}{10}$</td><td>1.618</td><td>0.382</td></tr><tr><td>$\frac{3\pi}{20}$</td><td>1.175</td><td>0.824</td></tr><tr><td>$\frac{\pi}{5}$</td><td>0.618</td><td>1.382</td></tr><tr><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>$\frac{3\pi}{10}$</td><td>-0.618</td><td>2.618</td></tr><tr><td>$\frac{7\pi}{20}$</td><td>-1.175</td><td>3.175</td></tr><tr><td>$\frac{2\pi}{5}$</td><td>-1.618</td><td>3.618</td></tr><tr><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>-2</td><td>4</td></tr></table>

2	Luego de tener la tabla con los valores de “x” y de “y” graficamos:	
3.	El área superficial en paramétricas se define de la manera siguiente:	$$A_s = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
4.	Encontramos las derivadas que se requieren:	$$\frac{dx}{dt} = 2[-sen(2t)](2) = -4sen(2t)$$ $$\frac{dy}{dt} = -4[2\cos(t)][-sen(t)] = 8sen(t)\cos(t)$$
5.	Antes de definir nuestro límites de integración, veamos la gráfica del recorrido de nuestra curva paramétrica, si lo hacemos desde $0\ a \frac{\pi}{2}$ nos daría cero, ya que el radio de $\frac{\pi}{4}\ a \frac{\pi}{2}$ nos da negativo. Lo mejor es hacerlo desde $0\ a \frac{\pi}{4}$ y como es simétrico multiplicarlo por 2.	$$A_s = 2(2\pi \int_0^{\pi/4} [2\cos(2t)] \sqrt{[-4sen(2t)]^2 + [8sen(t)\cos(t)]^2} dt)$$
6.	INCISO C Para eliminar el parámetro haremos una sustitución, utilizando una identidad:	$$\cos(2t) = 2cos^2(t) - 1$$ $$x = 2(2cos^2(t) - 1) = 4cos^2(t) - 2$$

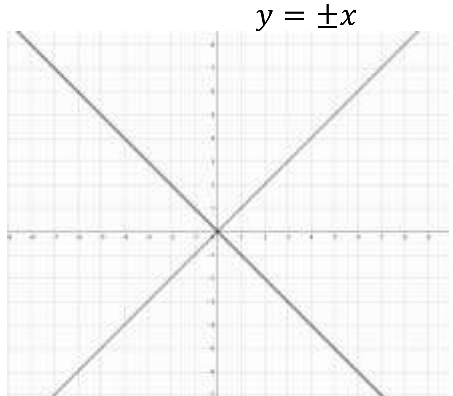
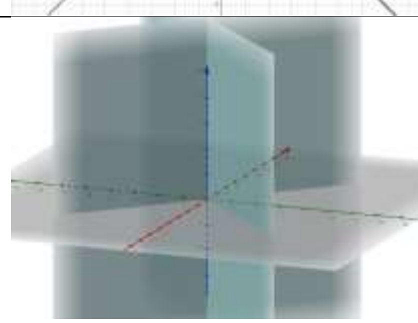
7.	Lo más fácil es ver que tanto "x" como "y" poseen un término en común, que es $cos^2(t)$, despejamos en una y sustituimos en la otra.	$y = 4 - 4cos^2(t)$ $4cos^2(t) = 4 - y$ $cos^2(t) = \frac{4-y}{4}$ $x = 4cos^2(t) - 2$ $x = 4\left(\frac{4-y}{4}\right) - 2$ $x = 4 - y - 2 = 2 - y$ $y = 2 - x$

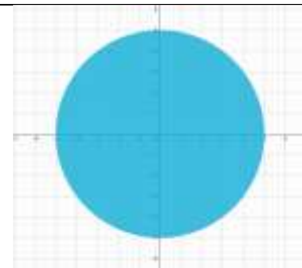
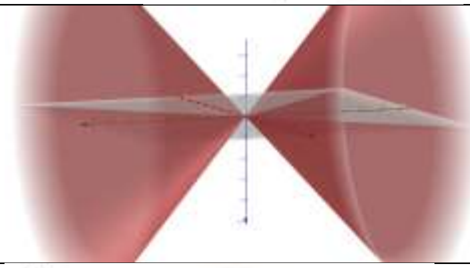
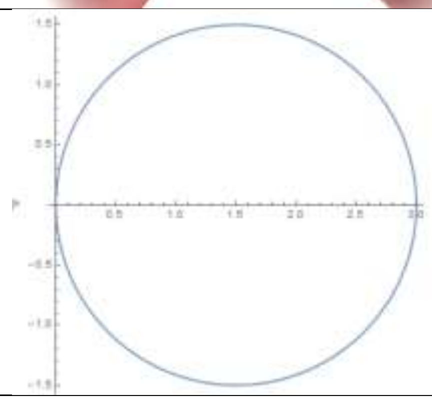
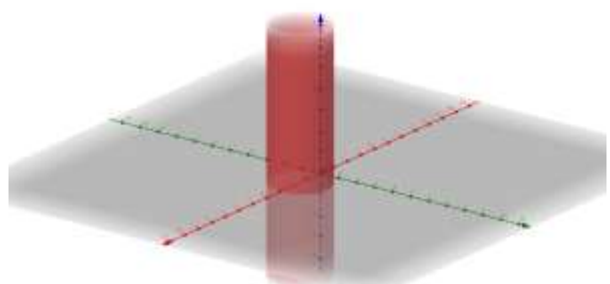
$$b)\quad A_s = 2(2\pi \int_0^{\pi/4} [2\cos(2t)]\sqrt{[-4sen(2t)]^2 + [8sen(t)\cos(t)]^2}dt)$$
$$c)\quad y = 2 - x$$

Tema 10 (10 Puntos):

Identifique y grafique en R^3.

a. $y^2 = x^2 + z^2$
b. $r = 3\cos\theta,\ \ (0 \le \theta \le \pi)$
c. $\rho = \pi$

NO.	EXPLICACIÓN	OPERATORIA
1.	INCISO A Para realizar la gráfica usaremos trazas, iniciando por hacer que z=0, los cuales son planos que pasan por el punto (0,0) en el plano XY	$z = 0$ $y^2 = x^2$ $y = \pm x$ 
2.	En R^3 se vería de la siguiente forma:	

3.	La siguiente traza que podemos realizar, es con y=k, por lo tanto, tendremos círculos de diferentes tamaños (dependiendo del valor de k) en todo el plano y=k. Sección transversal y en R^3.	 
4.	Finalmente, al unir las trazas podemos apreciar que nuestros círculos que se forman en el plano $y = k$, se delimitan por los planos $y = \pm x$, por lo que en R^3, tendríamos 2 conos formados desde el origen.	
5.	INCISO B Si nos remitimos a coordenadas polares, $r = 3\cos(\theta)$ en el intervalo establecido, es un círculo con centro en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ desplazada sobre el eje x. (sección transversal)	
6.	Como "z" no aparece en nuestra ecuación, se desplaza a lo largo del eje z, con z=k, por lo que tenemos un cilindro.	
7.	INCISO C En este caso, solo basta con saber que:	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
8.	Si eliminamos la raíz cuadrada, sabemos que es una esfera centrada en el origen con radio π. (Gráfica en R^3)	$\pi^2 = x^2 + y^2 + z^2$