UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-1-M-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Julio 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Julio Eduardo Marroquín**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Julio Eduardo Marroquín**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Matemática Intermedia 3
Jornada matutina
Julio de 2019
Temario A

EXAMEN FINAL MI3

TEMA1 (30 Puntos)

Una masa de que pesa 64 libras se une a un resorte y lo estira 16 pies. La masa se sumerge en un medio que presenta una resistencia proporcional a 4 veces la velocidad instantánea. El movimiento da inicio desde el reposo un pie debajo de la posición de equilibrio.

- Encuentre la ecuación del movimiento
- Exprese la solución de la forma $x(t) = Ae^{-at}\sin(wt + \emptyset)$
- Calcule el instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia arriba por segunda vez.

TEMA 2 (30 PUNTOS)

Un circuito L-R-C serie con L=1/2H, R=10Ω, C=1/100F se conecta a una fuente E(t)=150V, Determine la carga instantánea Q(t) en el capacitor para t>0 si Q(0)=1 y i(0)=0 ¿Cuál es la carga en el condensador después de un largo tiempo?

TEMA 3 (20 PUNTOS)

Un pastel se calienta en un horno. Al inicio la temperatura del pastel es 10^{o}C, luego de 10 minutos 70^{0}C y a los veinte minutos la temperatura es 100^{0}C.

- ¿Cuál es la temperatura del horno?
- ¿En cuánto tiempo el pastel alcanza el 95% de la temperatura del horno?

TEMA 4 (20 PUNTOS)

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $y' = \sqrt{x + y}$
- $y^{IV} + 4y = 0$

Solución del examen

TEMA1 (30 Puntos)

Una masa de que pesa 64 libras se une a un resorte y lo estira 16 pies. La masa se sumerge en un medio que presenta una resistencia proporcional a 4 veces la velocidad instantánea. El movimiento da inicio desde el reposo un pie debajo de la posición de equilibrio.

- Encuentre la ecuación del movimiento
- Exprese la solución de la forma $x(t) = Ae^{-at}\sin(wt + \emptyset)$
- Calcule el instante en el que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia arriba por segunda vez.

$m = \frac{w}{g} = \frac{64}{32} = 2\ slug$ x(0)=1 x'(0)=0

$64 = k(16) \rightarrow k = 4lb/pie$ $\beta = 4$

$2\frac{dx^2}{dt^2} = -4x - 4\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \rightarrow \omega^2 = 2$

$2\lambda = 2 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \lambda^2 = 1$

$\lambda^2 - \omega^2 = 1 - 2 < 0 \rightarrow El\ sistema\ está\ subamortiguado$

$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2 i}$

$m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2 i}$

$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) + c_2\ sen(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t))$

$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(\sqrt{2-1}t) + c_2\ sen(\sqrt{2-1}t))$

$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2\ sen(t))$

$1 = e^{-(0)}(c_1 \cos(0) + c_2\ sen(0))$

$c_1 = 1$

$x'^{(t)} = e^{-t}\big(c_2 \cos(t) - c_1\ sen(t)\big) - e^{-t}(c_1 \cos(t) + c_2 sen(t))$

$0 = e^{-0}\left(c_2 \cos(0) - c_1\, sen(0)\right) - e^{-0}(c_1 \cos(0) + c_2 sen(0))$

$0 = c_2 - c_1$

$c_2 = c_1$

$c_2 = 1$

$$\boxed{\text{A) R// } x(t) = e^{-t} * (\cos t + \sin t)}$$

B)

$x(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t + \emptyset)$

$A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$

$\tan \phi = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \phi = 0.785398$

$$\boxed{\text{B) R// } x(t) = \sqrt{2} * e^{-t} * \sin(t + 0.785398)}$$

TEMA 2 (30 PUNTOS)

Un circuito L-R-C serie con L=1/2H, R=10Ω, C=1/100F se conecta a una fuente E(t)=150V, Determine la carga instantánea Q(t) en el capacitor para t>0 si Q(0)=1 y i(0)=0 ¿Cuál es la carga en el condensador después de un largo tiempo?

$L\frac{dq^2}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$ $\qquad q(0) = 1 \quad i(0) = \frac{dq}{dt} = 0$

$0.5\frac{dq^2}{dt^2} + 10\frac{dq}{dt} + 100\, q = 150$

Solución auxiliar

$0.5\, m^2 + 10m + 100 = 0 \;\rightarrow\; m^2 + 20m + 200 = 0$

$m_1 = -10 - 10i \quad \rightarrow \quad m_1 = \alpha + i\beta$

$m_2 = -10 + 10i \quad \rightarrow \quad m_2 = \alpha - i\beta$

$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 sen(\beta t))$

$y = e^{-10t}(C_1 \cos(10t) + C_2 sen(10t))$

Solución particular

$yp = A \rightarrow y'p = 0 \rightarrow y''p = 0$

$\frac{1}{2}(0) + 10(0) + 100A = 150 \rightarrow 100A = 150 \rightarrow A = \frac{3}{2}$

Solución

$y = e^{-10t}\left(C_1 \cos(10t) + C_2 sen(10t)\right) + \frac{3}{2}$

Para q(0)=1

$1 = e^{-10(0)}\left(C_1 \cos(10(0)) + C_2 sen(10(0))\right) + \frac{3}{2}$

$1 = C_1 + \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2}$

$y' = e^{-10t}\left(10C_2 \cos(10t) + 5sen(10t)\right) - 10e^{-10t}(-0.5 \cos(10t) + C_2\, sen(10t))$

$y'(0) = 0$

$$0 = e^{-10(0)}\left(10C_2 \cos(10(0)) + 5sen(10(0))\right) - 10e^{-10(0)}\left(-0.5 \cos\left(10(0)\right) + C_2\, sen(10(0))\right)$$

$0 = 10C_2 - 10\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 0 = 10C_2 + 5 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}$

A) R// $y = -\frac{1}{2}e^{-10t}\left(\cos(10t) + sen(10t)\right) + \frac{3}{2}$

B)

$t \rightarrow \infty$

$$y = -\frac{1}{2}e^{-10*\infty}\left(\cos(10*\infty) + sen(10*\infty)\right) + \frac{3}{2}$$

$$e^{-\infty} = 0$$

$$y = \frac{3}{2}$$

B) R// $q(t) = \frac{3}{2}$

TEMA 3 (20 PUNTOS)

Un pastel se calienta en un horno. Al inicio la temperatura del pastel es 10°C, luego de 10 minutos 70°C y a los veinte minutos la temperatura es 100°C.

- ¿Cuál es la temperatura del horno?
- ¿En cuánto tiempo el pastel alcanza el 95% de la temperatura del horno?

$$T(t) = T_m + A * e^{-kt}$$

t	T
0	10°C
10min	70°C
20min	100°C

Para t=0

$$10 = T_m + A * e^{-(0)k} \rightarrow 10 = T_m + A \rightarrow A = 10 - T_m \rightarrow T_m = 10 - A \quad \boxed{1}$$

Para t=10min

$$70 = T_m + A * e^{-(10)k} \quad \boxed{2}$$

Para t=20min

$$100 = T_m + A * e^{-(20)k} \quad \boxed{3}$$

Sustituyendo 1 en 2 y 3

$70 = 10 - A + A * e^{-(10)k} \rightarrow 60 = -A + A * e^{-(10)k} \rightarrow 60 = A(-1 + e^{-(10)k})$

$100 = 10 - A + A * e^{-(20)k} \rightarrow 90 = -A + A * e^{-(20)k} \rightarrow 90 = A(-1 + e^{-(20)k})$

Igualar A

$$\frac{60}{-1 + e^{-(10)k}} = \frac{90}{-1 + e^{-(20)k}} \rightarrow 60 * \left(-1 + e^{-(20)k}\right) = 90 * \left(-1 + e^{-(10)k}\right)$$

$$\frac{2}{3} * \left(-1 + e^{-(20)k}\right) = \left(-1 + e^{-(10)k}\right) \rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} * e^{-(20)k} = -1 + e^{-(10)k}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} * e^{-(20)k} = e^{-(10)k} \rightarrow U = e^{-(10)k} \rightarrow U^2 = e^{-(20)k}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} * U^2 = U \rightarrow \frac{2}{3} * U^2 - U + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow 2U^2 - 3U + 1 = 0$$

$U = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $U = 1$

$1 = e^{-(10)k}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = e^{-(10)k}$

$Ln(1) = -10k$ $\qquad$ $Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -10k$

$k = 0$ $\qquad$ $k = 0.0693147$

$$A = \frac{60}{\left(-1 + e^{-(10)*(0.0693147)}\right)} = -120$$

$10 = T_m + A$

$T_m = 10 - A = 10 - (-120) = 130$

A) R// Temperatura del horno

B)

$$0.95 * T_m = 130 - 120 * e^{-0.0693147t} \rightarrow 123.5 = 130 - 120 * e^{-0.0693147t}$$

$$-6.5 = -120 * e^{-0.0693147t} \rightarrow 0.054166 = e^{-0.0693147t}$$

$$Ln\left(\frac{13}{240}\right) = -0.0693147t \rightarrow t = 42.064519\ min$$

R// t=42.064min

TEMA 4 (20 PUNTOS)

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $y' = \sqrt{x+y}$
- $y^{IV} + 4y = 0$

A) $U = x + y$

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^{1/2} \rightarrow \frac{dU}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dU}{dx} - 1$$

$$\frac{dU}{dx} - 1 = U^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{dU}{dx} = U^{\frac{1}{2}} + 1 \rightarrow \frac{dU}{U^{\frac{1}{2}} + 1} = dx \rightarrow \frac{dU}{\sqrt{u} + 1} = dx$$

$$V^2 = U \rightarrow V = \sqrt{U} \rightarrow 2 * V * dV = dU$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2} + 1} * 2V = \int dx \rightarrow 2\int \frac{v * dv}{v + 1} = \int dx$$

$$\mathrm{w} = \mathrm{v} + 1 \rightarrow \mathrm{dw} = \mathrm{dv} \rightarrow 2\int \frac{w-1}{w} dw = \int dx$$

$$2\left[\int dw - \int \frac{dw}{w}\right] = \int dx$$

$$2[w - \ln(w)] = x + C$$

$$2[v + 1 - \ln(v+1)] = x + C$$

$$2\left[\sqrt{U} + 1 - \ln(\sqrt{U} + 1)\right] = x + C$$

$$2\left[\sqrt{x+y} + 1 - \ln(\sqrt{x+y} + 1)\right] = x + C$$

$$2 * \sqrt{x+y} + 2 - 2 * ln\left(\sqrt{x+y} + 1\right) = x + C$$

R// $\boxed{2 * \sqrt{x+y} + 2 - 2 * ln(\sqrt{x+y} + 1) = x + C}$

B) $y^4 + 4y = 0$

$m^4 + 4 = 0 \rightarrow m^4 + 4 + 4m^2 - 4m^2 = 0$

$(m^2 + 2)^2 - 4m^2 = 0 \rightarrow (m^2 + 2)^2 = 4m^2$

$m^2 + 2 = 2m \rightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$

$m1 = 1 + i$ $\quad$ $m2 = 1 - i$

$m1 = \alpha + i\beta$ $\quad$ $m2 = \alpha - i\beta$

Solución

$Y = e^{\alpha x} * (C_1 * \cos \beta x + C_2 * \sin \beta x)$

$Y = e^{x} * (C_1 * \cos x + C_2 * \sin x)$

R//
$Y = e^{x} * (C_1 * \cos x + C_2 * \sin x)$