UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-114-4-V-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Intermedia 3**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**114**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**20 de noviembre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Oscar Fonseca**
REVISÓ:	**Ing. Pablo Zuñiga**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Oscar Fonseca**
COORDINADOR:	**Ing. Vera Marroquín**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Examen Final **Matemática Intermedia 3**
20 de noviembre de 2019 **Jornada Vespertina**

Tema No. 1 (20 puntos)

La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110°F. Cuando el termómetro marca 36°F se coloca en un horno. Después de 1 y 2 minutos marca 60°F y 82°F, respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno?

Tema No. 2 (20 puntos)

En el instante $t = 0$, se quita del fondo un tapón circular (en el vértice) de un tanque cónico de 16 pies de altura, que está lleno de agua. Después de una hora el agua en el tanque tiene una altura de 9 pies de profundidad. ¿Cuánto tardará el tanque en vaciarse?

Tema No. 3 (20 puntos)

Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Salmuera con 1 lb de sal por galón entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución perfectamente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min. ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llegará a tener el tanque?

Tema No. 4 (20 puntos)

Un cuerpo que pesa 2 libras estira un resorte 0.5 pie. Una fuerza de amortiguación igual a la velocidad del objeto actúa sobre el sistema. El peso es puesto en movimiento desde la posición de equilibrio por una velocidad dirigida hacia debajo de 10 pie/s. Determine el máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio.

Tema No. 5 (20 puntos)

Determinar la solución particular del sistema:

$$x' = 4x - 3y, \qquad y' = 6x - 7y$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

CLAVE EXAMEN FINAL

Tema No. 1 (20 puntos)

La temperatura máxima que puede leerse en cierto termómetro es de 110°F. Cuando el termómetro marca 36°F se coloca en un horno. Después de 1 y 2 minutos marca 60°F y 82°F, respectivamente. ¿Cuál es la temperatura del horno?

No.	Explicación	Solución
1	Primero es importante analizar el modelo matemático necesario para resolver el problema. En este problema el modelo matemático a utilizar es La Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton.	$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - Tm)$$ Donde : T : Temperatura objeto T_m : Temperatura del medio $\frac{dT}{dt}$: La velocidad a la que cambia la temperatura del objeto. k: Constante de proporcionalidad
2	Ahora es importante reconocer los datos que nos proporciona el problema y que es lo que nos pide encontrar. (Tiempo en minutos y Temperatura en °F)	$t = 0\ minutos \rightarrow T = 36°F$ $t = 1\ minutos \rightarrow T = 60°F$ $t = 2\ minutos \rightarrow T = 82°F$ $T_m = ?$
3	El modelo matemático en el paso No.1 es una ecuación lineal. Resolviendo esta ecuación diferencial por medio de separación de variables, se obtiene:	$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - Tm)$$ $$\frac{dT}{(T - Tm)} = kdt$$
4	Integrando en ambos lados de la ecuación se obtiene:	$$\int \frac{dT}{(T - Tm)} = \int kdt$$ $$\ln(T - T_m) = kt + c$$
5	Simplificando la expresión se obtiene:	$$e^{\ln(T - T_m)} = e^{kt+c}$$

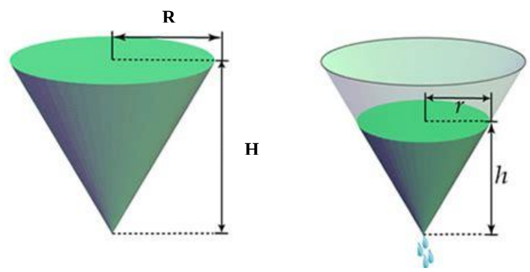
		$e^{\cancel{\ln}(T-T_m)} = e^{kt} * e^c$ Con: D = e^c $(T - T_m) = D\, e^{kt}$
6	La temperatura del objeto en función del tiempo sería:	$T(t) = T_m + D * e^{kt}$
7	A partir de las condiciones que nos da el problema se encuentra la solución particular de la Ecuación Diferencial. Para $t = 0 \rightarrow T = 36°\mathrm{F}$	$T(0) = T_m + D * e^{k(0)}$ $36 = T_m + D\,(1)$ $36 = T_m + D$
8	Para $t = 1 \rightarrow T = 60°\mathrm{F}$	$T(1) = T_m + D * e^{k(1)}$ $60 = T_m + D\, e^k$
9	Para $t = 2 \rightarrow T = 82°\mathrm{F}$	$T(2) = T_m + D * e^{k(2)}$ $82 = T_m + D\, e^{2k}$
10	Al evaluar las condiciones del problema, se obtiene un sistema de ecuaciones de 3 X 3 (3 ecuaciones y 3 incógnitas). Al despejar k de la ecuación del paso 8 se obtiene:	$60 = T_m + D\, e^k$ $60 - T_m = D\, e^k$ $\frac{60 - T_m}{D} = e^k$ $\ln(\frac{60 - T_m}{D}) = \cancel{\ln} e^k$ $\ln(\frac{60 - T_m}{D}) = k$
11	Al despejar k de la ecuación del paso 9 se obtiene:	$82 = T_m + D\, e^{2k}$ $82 - T_m = D\, e^{2k}$ $\frac{82 - T_m}{D} = e^{2k}$

		$\ln\left(\frac{82 - T_m}{D}\right) = \cancel{\ln} e^{2k}$ $\ln\left(\frac{82 - T_m}{D}\right) = 2k$ $\frac{\ln\left(\frac{82 - T_m}{D}\right)}{2} = k$
12	Al igualar las "k" de las ecuaciones del paso 10 y 11 se obtiene:	$\frac{\ln\left(\frac{82 - T_m}{D}\right)}{2} = \ln\left(\frac{60 - T_m}{D}\right)$
13	Al despejar "D" de la ecuación del paso 7 se obtiene:	$36 = T_m + D$ $D = 36 - T_m$
14	Al sustituir "D" de la ecuación del paso 13 en la ecuación del paso 12 se obtiene:	$\frac{\ln\left(\frac{82 - T_m}{36 - T_m}\right)}{2} = \ln\left(\frac{60 - T_m}{36 - T_m}\right)$
15	Resolviendo la ecuación del paso 14 se obtiene el valor de la temperatura del medio (En este problema sería la temperatura del Horno)	$\frac{\ln\left(\frac{82 - T_m}{36 - T_m}\right)}{2} = \ln\left(\frac{60 - T_m}{36 - T_m}\right)$ $\ln\left(\frac{82 - T_m}{36 - T_m}\right) = 2 * \ln\left(\frac{60 - T_m}{36 - T_m}\right)$ $\ln\left(\frac{82 - T_m}{36 - T_m}\right) = \ln\left(\frac{60 - T_m}{36 - T_m}\right)^2$ $\cancel{e^{\ln}}^{\left(\frac{82-T_m}{36-T_m}\right)} = \cancel{e^{\ln}}^{\left(\frac{60-T_m}{36-T_m}\right)^2}$ $\frac{82-T_m}{36-T_m} = \left(\frac{60-T_m}{36-T_m}\right)^2$ $\frac{(82-T_m)}{(36-T_m)} = \frac{(60-T_m)^2}{(36-T_m)^2}$

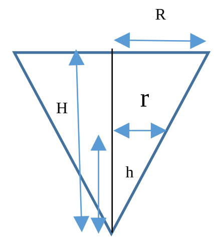
		$\frac{(82-T_m)*(36-T_m)^{\cancel{2}}}{\cancel{(36-T_m)}} = (60-T_m)^2$ $(82-T_m)*(36-T_m) = (60-T_m)^2$ $\cancel{T_m}^2 - 118\,T_m + 2952 = \cancel{T_m}^2 - 120\,T_m + 3600$ $-118T_m + 120\,T_m = 3600 - 2952$ $2T_m = 6248$ $T_m = 324\text{ °F}$
16	Con el valor de T_m se puede encontrar el valor de la constante “D” usando la ecuación del paso 13	$D = 36 - T_m$ $D = 36 - 324$ $D = -288$
17	Al sustituir los valores de T_m y D en la ecuación del paso 10 se obtiene el valor de k.	$\ln(\frac{60-T_m}{D}) = k$ $\ln(\frac{60-324}{-288}) = k$ $\ln(\frac{11}{12}) = k$ $k = -0.087$
18	Al sustituir los valores de T_m , D, k se obtiene la función que denota la variación de la temperatura del objeto en función del tiempo.	$T(t) = 324 - 288e^{-0.087t}$
19	En conclusión (Respuesta final del problema 1), La temperatura a la que se encuentra el horno es de:	$\boxed{T_m = 324\text{ °F}}$

<u>Tema No. 2</u> (20 puntos)

En el instante $t = 0$, se quita del fondo un tapón circular (en el vértice) de un tanque cónico de 16 pies de altura, que está lleno de agua. Después de una hora el agua en el tanque tiene una altura de 9 pies de profundidad. ¿Cuánto tardará el tanque en vaciarse?



1	Primero es importante analizar el modelo matemático necesario para resolver el problema. En este problema el modelo matemático a utilizar es la Ley de Torricelli para Drenado de Tanques.	$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2 * g * h}$$ Donde : A_w : Área del espejo de agua A_h : Area del agujero $\frac{dh}{dt}$: La velocidad a la que cambia la altura o la profundidad del agua. h: Altura o profundidad del agua g : Gravedad.
2	Ahora es importante reconocer los datos que nos proporciona el problema y que es lo que nos pide encontrar. (Altura en pies y tiempo en segundos)	$t = 0\ segundos \rightarrow h = 16\ pies$ $t = 1\ hora = 60\ minutos\ \rightarrow h = 9\ pies$ $t = ? \rightarrow h = 0\ pies$
3	Se debe encontrar la relación del área del espejo de agua con la profundidad del cono. Esta relación se encuentra por medio de triángulos semejantes.	$A_w = \pi * r^2$

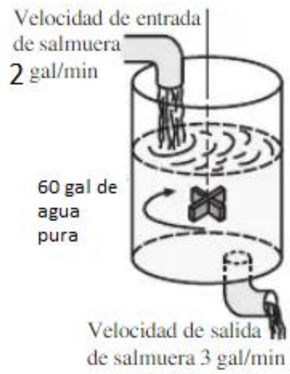
		 $\frac{R}{H} = \frac{r}{h}$ $r = \frac{R*h}{H}$ $A_w = \pi * (\frac{R*h}{H})^2$
4	El área del agujero es:	$A_h = \pi * r'^2$
5	Sustituyendo algunos datos de la ecuación diferencial del modelo y simplificando dicha expresión, tenemos:	$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2*g*h}$ $\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi * r'^2}{\pi * \left(\frac{R*h}{H}\right)^2} * \sqrt{2*g*h}$ $\frac{dh}{dt} = -\frac{r'^2}{\frac{R^2 * h^2}{H^2}} * \sqrt{2*g*h}$ $\frac{dh}{dt} = -\frac{r'^2 * H^2}{R^2 * h^2} * \sqrt{2*g*h}$
6	Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables.	$\frac{dh}{dt} = -\frac{r'^2 * H^2}{R^2 * h^2} * \sqrt{2*g*h}$ $\frac{h^2}{\sqrt{h}} dh = -\frac{r'^2 * H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\ dt$

7	Integrando en ambos lados de la ecuación se obtiene:	$\int h^{3/2}dh = \int -\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\ \ dt$ $\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)t + c$
8	Considerando las condiciones iniciales obtenemos: Para $t = 0\ s \rightarrow h = 16\ pies$	$\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)t + c$ $\frac{2*(16)^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)(0) + c$ $c = \frac{2048}{5}$
9	Para $t = 60\ minutos \rightarrow h = 9\ pies$	$\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)t + \frac{2048}{5}$ $\frac{2*(9)^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)(60) + \frac{2048}{5}$ $\frac{486}{5} - \frac{2048}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)(60)$ $\frac{-1562}{300\sqrt{2*g}} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2}\right)$ $\frac{1562}{300 * \ H^2 * \sqrt{2*g}} = \left(\frac{r'^2}{R^2}\right)$
10	Sustituyendo la relación $\left(\frac{r'^2}{R^2}\right)$ obtenida del paso 9 en la solución de la ecuación diferencial	$\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2 * \ H^2}{R^2} * \sqrt{2*g}\right)t + \frac{2048}{5}$ $\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{r'^2}{R^2} * \ H^2 * \sqrt{2*g}\right)t + \frac{2048}{5}$ $\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\left(\frac{1562}{300 * \ \cancel{H^2} * \cancel{\sqrt{2*g}}}\right) * \ \cancel{H^2} * \cancel{\sqrt{2*g}}\right)t + \frac{2048}{5}$

		$$\frac{2*h^{5/2}}{5} = \left(-\frac{1562}{300}\right)t + \frac{2048}{5}$$ $$h^{5/2} = (\frac{5}{2})\left(-\frac{1562}{300}\right)t + \frac{2048}{5}$$
11	El tiempo que tardará el tanque cónico es vaciarse es : $t = ? \rightarrow h = 0\ pies$	$$h^{5/2} = (\frac{5}{2})\left(-\frac{1562}{300}\right)t + \frac{2048}{5}$$ $$0 = (\frac{5}{2})\left(-\frac{1562}{300}\right)t + \frac{2048}{5}$$ $$t = -1024*\left(-\frac{300}{1562}\right)*\ (\frac{2}{5})$$ $t = 78.67\ minutos$ Ó $t = 4{,}720.10\ segundos$ Ó $t = 1.31\ horas$

Tema No. 3 (20 puntos)

Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Salmuera con 1 lb de sal por galón entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución perfectamente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min. ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llegará a tener el tanque?



No	Explicación	Solución
1	Primero es importante analizar el modelo matemático necesario para resolver el problema. En este problema el modelo matemático a utilizar es una ecuación diferencial de primer orden para la cantidad de sal contenida en la mezcla.	$$\frac{dA}{dt} = R_{entrada} - R_{salida}$$ Donde : $R_{entrada}$: La velocidad a la que ingresa la sal al tanque. R_{salida} : La velocidad a la que sale la sal del tanque. T_m : Temperatura del medio $\frac{dA}{dt}$: La velocidad a la que cambia la concentración de sal en el tanque.
2	Se debe determinar la $R_{entrada}$ Según los datos que nos dé el problema.	$R_{entrada} = \left(\frac{2\ gal}{min}\right) * \left(\frac{1\ lb}{gal}\right) = \left(2\frac{lb}{min}\right)$
3	Debido a que sale más fluido de lo que entra al tanque, se debe encontrar como varía la el volumen del tanque en función del tiempo.	$t = 0\ min \rightarrow V = 60\ + 2\ (0) - 3(0) = 60$ $t = 1\ min\ \rightarrow V = 60 + 2\ (1) - 3(1) = 59$ $t = 2\ min \rightarrow V = 60 + (2)(2) - 3(2) = 58$

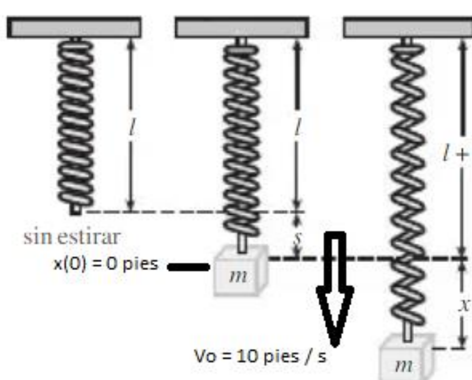
		$t = t\ min \rightarrow V = 60 + (2)(t) - 3(t)$ $\rightarrow V = 60 - (t)$
4	Se debe determinar la R_{salida} Según los datos que nos dé el problema.	$R_{Salida} = \left(\frac{3\ gal}{min}\right) * \left(\frac{A\ lb}{(60-t)gal}\right) = \left(\frac{3A}{(60-t)}\frac{lb}{min}\right)$
5	Sabiendo los datos de $R_{entrada}$ y R_{Salida} Se sustituyen dichos datos en el modelo matemático	$\frac{dA}{dt} = 2 - \frac{3A}{(60-t)}$ $\frac{dA}{dt} + \frac{3A}{(60-t)} = 2$
6	La ecuación obtenida en el paso No.5 es una ecuación lineal en "V".	$A' + P(t)A = Q(t)$ Donde $P(t) = \frac{3}{(60-t)}$
7	Por lo tanto se procede a encontrar el factor de integración:	$F.I. = e^{\int \frac{3}{(60-t)} dt}$
8	Donde la integral $\int \frac{3}{(60-t)}\ dt$ se puede resolver por medio de sustitución de "u" Esta integral sale de forma directa. Regresando a la variable t	$\int \frac{3}{(60-t)}\ dt$ Con $u = (60-t)$ $du = -1\ dt$ $dt = -\ du$ $3\int \frac{-du}{(u)}$ $-3\ln(u)$ $-3\ln(60-t)$
9	El factor integrante sería: Según la ley de logaritmo se puede reescribir como:	$e^{-3\ln(60-t)}$ $\cancel{e}^{(\ln(60-t))^{-3}}$ $F.I \rightarrow (60-t)^{-3}$

10	Se debe de multiplicar el factor integrante por toda la ecuación la ecuación diferencial	$(60-t)^{-3} * \left(\frac{dA}{dt} + \frac{3A}{(60-t)} = 2\right)$ $(60-t)^{-3}\frac{dA}{dt} + \frac{3A}{(60-t)^4} = 2\,(60-t)^{-3}$
11	La ecuación diferencial del paso 10 se puede reescribir como	$\frac{d}{dt}\,\frac{A}{(60-t)^3} = 2\,(60-t)^{-3}$
12	Integrando en ambos lados de la igualdad	$\cancel{\int \left(\frac{d}{dt}\right.}\,\frac{A}{(60-t)^3}\Big)\,dt = \int 2\,(60-t)^{-3}\,dt$ $\frac{A}{(60-t)^3} = (60-t)^{-2} + c$ $A\,(t) = (60-t)^{-2}\,((60-t)^3) + c(60-t)^3$ $A\,(t) = (\,60-t) + c(60-t)^3$
13	Utilizando las condiciones iniciales para encontrar el valor de la constante "c" $t\ = ? \rightarrow A\ = 0\ libras\ de\ sal$	$A\,(0) = (\,60-0) + c(60-0)^3$ $0 = (\,60-0) + c(60-0)^3$ $0 = 60 + c(216{,}000)$ $c = \frac{-1}{3{,}600}$
14	Sabiendo el valor de la constante "c" la solución de la ecuación diferencial sería:	$A\,(t) = (\,60-t) - \frac{1}{3{,}600}(60-t)^3$
15	Para encontrar la máxima cantidad de sal que pueda llegar a contener el tanque, se debe encontrar un máximo relativo y esto se logra cuando la derivada de la función se hace cero.	$A\,(t) = (\,60-t) - \frac{1}{3{,}600}(60-t)^3$ $A'\,(t) = -1 - (3)\frac{1}{3{,}600}(60-t)^2(-1)$ $A'\,(t) = -1 + \frac{1}{1{,}200}(60-t)^2 = 0$ $(60-t)^2 = 1200$ $t = 60 - \sqrt{1200} \approx 25.359$

16	Para asegurar de que el dato que se encontró en el paso 15 es un máximo relativo se hace la prueba de la segunda derivada. Y en efecto es un máximo relativo debido a que la segunda derivada da como resultado un valor negativo.	$A'(t) = -1 + \frac{1}{1{,}200}(60-t)^2$ $A''(t) = \frac{2}{1{,}200}(-1)(60-t)$ $A''(t) = \frac{-1}{600}(60-t)$
17	La máxima cantidad de sal que puede haber en el tanque es en $t \approx 25.359\ minutos$	$A\ (23.359) = (\ 60 - (23.359)) - \frac{1}{3{,}600}(60 - (23.359))^3$ $\boxed{A\ (23.359) = 23.0940\ lb\ de\ sal}$

<u>Tema No. 4</u> (20 puntos)

Un cuerpo que pesa 2 libras estira un resorte 0.5 pie. Una fuerza de amortiguación igual a la velocidad del objeto actúa sobre el sistema. El peso es puesto en movimiento desde la posición de equilibrio por una velocidad dirigida hacia debajo de 10 pie/s. Determine el máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio.



No.	Explicación	Solución
1	Primero es importante analizar el modelo matemático necesario para resolver el problema.	$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$ Donde :

	En este problema el modelo matemático a utilizar es el sistema resorte-masa: Movimiento libre amortiguado	m : masa del objeto k : constante del resorte β : constante de amortiguamiento
2	Analizando los datos que nos proporciona el problema:	$W = 2\ lb$ $x = 0.5\ pies$ $\beta = igual\ a\ la\ velocidad\ del\ objeto$ $\rightarrow \beta = 1$ $g = 32\ \frac{pies}{s^2}$
3	Se calcula la masa del objeto "m" y la constante del resorte "k"	$W = m * g$ $m = \frac{W}{g} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} slug$ $W = k * x$ $k = \frac{W}{x} = \frac{2}{0.5} = 4 \frac{lb}{pie}$
4	Se sustituyen los valores en la ecuación diferencial.	$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - \frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -64x - 16\ \frac{dx}{dt}$
5	Se ordena la ecuación diferencial y se resuelve la Ecuación Diferencial Lineal de orden superior por medio de una ecuación auxiliar, considerando a "m" como m = $\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = -64x - 16\ \frac{dx}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 16\ \frac{dx}{dt} + 64x = 0$ $m^2 + 16m + 64 = 0$ $(m+8)(m+8) = 0$ $\rightarrow m_1 = -8$ $\rightarrow m_2 = -8$

6	Como $m_1 = m_2$ entonces la y_c interpretaría como:	$x_c = C_1 * e^{m_1 t} + C_2 * t * e^{m_2 t}$ $x_c = C_1 e^{-8\,t} + C_2 * t * e^{-8t}$
7	Utilizando las condiciones iniciales que presenta el problema se encuentra la solución particular de la ecuación diferencial. $x(0) = 0$ $x'(0) = 10\,pies/s$	$x(t) = C_1 e^{-8\,t} + C_2 * t * e^{-8t}$ $x(0) = C_1 e^{-8\,(0)} + C_2 * (0) * e^{-8(0)}$ $0 = C_1(1) + C_2 * (0) * (1)$ $0 = C_1$ $x'(t) = -8 * C_1 e^{-8\,t} + C_2 * e^{-8t} - 8 * t * C_2 * e^{-8t}$ $x'(0) = -8 * (0) e^{-8\,(0)} + C_2 * e^{-8(0)} - 8 * (0) C_2 * e^{-8(0)}$ $10 = C_2$
8	La solución particular de la ecuación diferencial es:	$x(t) = C_1 e^{-8\,t} + C_2 * t * e^{-8t}$ $x(t) = 10te^{-8t}$
9	Para determinar el máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio se debe encontrar un máximo relativo y esto se logra cuando la derivada de la función se hace cero.	$x(t) = 10te^{-8t}$ $x'(t) = (-8)10te^{-8t} + 10\,e^{-8t}$ $x'(t) = -80te^{-8t} + 10\,e^{-8t} = 0$ $e^{-8t}(-80t + 10) = 0$ Para $e^{-8t} = 0$ No existe ningún valor de t para que se cumpla esta expresión. Para $(-80t + 10) = 0$ $t = \frac{1}{8}$

10	Se evalua el tiempo "t" encontrado para determinar el máximo desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio	$x\left(\frac{1}{8}\right) = 10\left(\frac{1}{8}\right)e^{-8\left(\frac{1}{8}\right)}$ $x\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{10}{8}\right)e^{-1}$ $\boxed{x_{max} \approx 0.4598\ pies}$

<u>Tema No. 5</u> (20 puntos)

Determinar la solución particular del sistema:

$$x' = 4x - 3y, \qquad y' = 6x - 7y$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 2, \quad y(0) = -1$.

No.	Explicación	Solución
1	Para la solución del sistema de ecuaciones se utiliza el método de eliminación sistemática que es el principio algebraico de eliminación de variables. Se reescribe el sistema de ecuaciones a la siguiente manera para que resulte de una manera más sencilla la eliminación de la variables.	$Dx - 4x + 3y = 0$ (1) $x\,(D - 4) + 3y = 0$ $Dy - 6x + 7y = 0$ (2) $y\,(D + 7) - 6x = 0$
2	Para la eliminación de la primera variable consideramos multiplicar la ecuación 1 del paso 1 por (6) y la ecuación 2 del paso 1 se multiplica por (D-4)	$[x\,(D - 4) + 3y = 0] \quad * \quad (6)$ $[-6x + y\,(D + 7) = 0] \, * \, (D - 4)$
3	Después de a multiplicación en cada respectiva ecuación, Se procede a hacer la eliminación de términos	$[\cancel{6x\,(D - 4)} + 18y = 0]$ $[\cancel{-6x\,(D - 4)} + y\,(D + 7)(D - 4) = 0]$ $18y + y\,(D + 7)(D - 4) = 0$

4	Ampliando la expresión algebraica del paso 3 se obtiene:	$18y + \ y\,(D+7)(D-4) = \ 0$ $18y + \ y\,(D^2+3D-28 = \ 0$ $18y + \ \ D^2y + 3Dy - 28y = \ 0$ $D^2y + 3Dy - 10y = \ 0$
5	Haciendo uso de una ecuación auxiliar se encuentra la solución de la ecuación diferencial Lineal de orden superior. considerando a “m” como m = $\frac{dy}{dt}$	$D^2y + 3Dy - 10y = \ 0$ $m^2 + 3m - 10 = \ 0$ $(m+5)(m-2) = \ 0$ $\rightarrow \ m_1 = \ -5$ $\rightarrow \ m_2 = \ 2$
6	Como $m_1 \neq m_2$ entonces la y_c interpretaría como:	$y_c = C_1 * e^{m_1 t} + \ C_2 * e^{m_2 t}$ $y = C_1 e^{-5\,t} + \ C_2 * e^{2t}$
7	Se repite el mismo procedimiento para la eliminación de la primera variable “y” y para ello consideramos multiplicar la ecuación 1 del paso 1 por (D+7) y la ecuación 2 del paso 1 se multiplica por (-3)	$[x\,(D \ -4) + 3y = 0] \quad * \quad (D+7)$ $[\,-6x + y\,(D+7) = \ 0] \ * \ (-3)$
8	Después de la multiplicación en cada respectiva ecuación, Se procede a hacer la eliminación de términos	$[x\,(D \ -4)(D+7) + \cancel{3y(D+7)} = 0]$ $[\,18x - \cancel{3y\,(D+7)} = \ 0]$ $18x + \ x(D+7)(D-4) = \ 0$
9	Ampliando la expresión algebraica del paso 3 se obtiene:	$18x + \ x(D+7)(D-4) = \ 0$ $18x + \ x\,(D^2+3D-28 = \ 0$ $18x + \ \ D^2x + 3Dx - 28x = \ 0$ $D^2x + 3Dx - 10x = \ 0$

10	Haciendo uso de una ecuación auxiliar se encuentra la solución de la ecuación diferencial Lineal de orden superior. considerando a “m” como m = $\frac{dx}{dt}$	$D^2x + 3Dx - 10x = 0$ $m^2 + 3m - 10 = 0$ $(m+5)(m-2) = 0$ $\rightarrow m_1 = -5$ $\rightarrow m_2 = 2$
11	Como $m_1 \neq m_2$ entonces la x_c interpretaría como:	$x_c = C_3 * e^{m_1 t} + C_4 * e^{m_2 t}$ $x = C_3 e^{-5\,t} + C_4 * e^{2t}$
12	Teniendo en cuenta que se cuenta con 4 constantes, y únicamente 2 condiciones iniciales entonces se deben de relacionar estas constantes para poder encontrar la solución particular del sistema de ecuaciones. Para determinar la relación de estas constantes se utiliza una de las 2 ecuaciones diferenciales:	Sabiendo: $y = C_1 e^{-5\,t} + C_2 * e^{2t}$ $x = C_3 e^{-5\,t} + C_4 * e^{2t}$ $x' = (-5)\, C_3 e^{-5\,t} + (2)\, C_4 * e^{2t}$ $x' = 4x - 3y$ $(-5)\, C_3 e^{-5\,t} + (2)\, C_4 * e^{2t} = 4[C_3 e^{-5\,t} + C_4 * e^{2t}\ ] - 3\,[C_1 e^{-5\,t} + C_2 * e^{2t}\ ]$
13	Se simplifica la expresión del paso 12	$(-9)\, C_3 e^{-5\,t} - (2)\, C_4 + 3C_1 e^{-5\,t} + 3C_2 * e^{2t} = 0$
14	Según los coeficientes de $(e^{-5\,t})$ se tiene que:	$(-9)\, C_3 + 3C_1 = 0$ $C_1 = 3\, C_3$
15	Según los coeficientes de (e^{2t}) se tiene que:	$(-2)\, C_4 + 3C_2 = 0$ $C_2 = \frac{2}{3}\, C_4$
16	Con las relaciones obtenidas en el paso 14 y 15, ahora las soluciones de las ecuaciones diferenciales se pueden escribir con únicamente dos constantes:	$y = C_1 e^{-5\,t} + C_2 * e^{2t}$ $y = 3C_3 e^{-5\,t} + \frac{2}{3}\, C_4\, e^{2t}$ $x = C_3 e^{-5\,t} + C_4 * e^{2t}$

17	Con las condiciones iniciales que el problema nos indica se puede encontrar los valores de las contantes desconocidas y proporcionar las soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales.	$x(0) = 2$ $x(0) = C_3e^{-5(0)} + C_4 * e^{2(0)}$ $2 = C_3 + C_4$ $y(0) = -1$ $y\ (0) = 3C_3e^{-5\ (0)} + \frac{2}{3}C_4\ e^{2(0)}$ $-1 = -3C_3 + \frac{2}{3}C_4$
18	Después de evaluar las condiciones iniciales queda un sistema de ecuaciones de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene el valor de las constantes. El sistema se resolverá por sustitución de variables, Se despeja una variable de una ecuación y luego se sustituye en la otra ecuación. Ya encontrado el valor de una constante, ahora se sustituye en la otra ecuación y se encuentra el valor de la otra ecuación:	$\boxed{\begin{array}{c} 2 = C_3 + C_4 \\ -1 = 3C_3 + \frac{2}{3}C_4 \end{array}}$ $\rightarrow \quad -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}C_3 = C_4$ $\rightarrow \quad 2 = C_3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}C_3\right)$ $\rightarrow \quad \frac{7}{2} = \left(-\frac{7}{2}C_3\right)$ $\rightarrow \quad C_3 = -1$ $2 = (-1) + C_4$ $\rightarrow \quad C_4 = 3$
19	Sustituyendo los valores de las constantes en las soluciones generales del sistema de ecuaciones diferenciales.	$y(t) = 3C_3e^{-5\,t} + \frac{2}{3}C_4\ e^{2t}$ $y(t) = -3e^{-5\,t} + 2e^{2t}$ $x(t) = C_3e^{-5\,t} + C_4 * e^{2t}$ $x\ (t) = -e^{-5\,t} + 3 * e^{2t}$

20	La solución particular del sistema de ecuaciones es:	$y(t) = -3e^{-5\,t} + 2e^{2t}$ $x(t) = -e^{-5\,t} + 3 * e^{2t}$