UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-1-V-1-00-2019

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**21 de Septiembre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial con valores iniciales

$$y'' - y' = e^{t}\cos(t)$$

TEMA 2

Determine la transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}\{e^{-3t}sen(5t)\}$ b) $\mathcal{L}\{(e^{-2t}+2e^{t})^{3}\}$ c) $\mathcal{L}\{sen(t)v(t-\frac{\pi}{2})\}$

TEMA 3

Dada la funcion por partes, calcule la transforamada

$$f(t) = \left\{\begin{array}{cc} 3t^2 & 0 < t < 4 \\ 2t-3 & 4 < t < 6 \\ 5 & t > 6 \end{array}\right\}$$

TEMA 4

Calcular la transformada inversa de las siguientes funciones

a)$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(5-4s)e^{-4s}}{s^2+7s+10}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-1}{(s^3+4s)(s-5)}\right\}$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial con valores iniciales

$$y'' - y' = e^t \cos(t) \qquad\qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe considerar que para resolver ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace, se toman en cuenta las siguientes consideraciones.	$s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0)$
2.	Se le realiza la transformada de Laplace a la ecuación diferencial, quedando de la siguiente manera. Recordando el primer teorema de traslación.	$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) +$ $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) +$ $\mathcal{L}\{e^t \cos(t)\} = \left.\dfrac{s}{s^2+1}\right\|_{s \to s-1}$
3.	Se sustituyen las condiciones iniciales en la ecuación diferencial y se despeja para Y(s). Además se separan en fracciones parciales si es posible.	$Y(s) = \dfrac{1}{[(s-1)^2+1]} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs + C}{[(s-1)^2+1]}$
4.	Se arma un sistema de ecuaciones para poder determinar los valores de A, B y C.	$A = \dfrac{1}{2}, B = \dfrac{-1}{2}\ y\ C = 1$
5.	Se sustituyen los valores que encontramos en fracciones parciales y luego se procede a realizar la transformada inversa de Laplace.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1/2}{s} + \dfrac{-(1/2)s + 1}{[(s-1)^2+1]}\right\}$

6.	Se realizan las transformadas inversas correspondientes, quedando de la siguiente manera.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s}\right\} = 1/2$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{(s-1)^2+1}\right\} = \frac{1}{2}e^t \sin(t)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{2[(s-1)^2+1]}\right\} = -\frac{1}{2}e^t \sin(t)$

El resultado de la ecuación diferencial

R./ $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t \sin(t) - \frac{1}{2}e^t \cos(t)$

TEMA 2

Determine la transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}\{e^{-3t} sen(5t)\}$ b) $\mathcal{L}\{(e^{-2t} + 2e^t)^3\}$ c) $\mathcal{L}\{sen(t)\upsilon(t - \frac{\pi}{2})\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver el inciso a) debemos de utilizar el teorema de traslación.	$\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin(5t)\} = \frac{5}{s^2+1}_{\,s\to s+3}$
2.	Se sustituye la traslación de s en cada uno de los valores donde se encuentre s.	$\frac{5}{(s+3)^2+1}$

$$\frac{5}{(s+3)^2+1}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para el inciso b) se debe de desarrollar el producto del binomio.	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2.	Luego de haber desarrollado el producto del binomio se procede a realizar la transformada de Laplace.	$\mathcal{L}\{e^{-6t} + 6e^{-3t} + 12 + 8e^{3t}\}$
3.	Se realizan las transformadas de Laplace correspondientes para termino por separado.	$\frac{1}{s+6} + \frac{6}{s+3} + \frac{12}{s} + \frac{8}{s-3}$

$$\frac{1}{s+6} + \frac{6}{s+3} + \frac{12}{s} + \frac{8}{s-3}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para realizar la transformada de Laplace del inciso c) se debe de sumar y restar un factor de $\pi/2$ dentro del argumento	$\sin(t)\mu(t-\frac{\pi}{2})$ $\sin(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\mu(t-\frac{\pi}{2})$
2.	Luego debemos utilizar identidades trigonométricas para poder separar los términos que se encuentran dentro de la función senoidal.	$\sin\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $0 + \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

3.	De esta manera ya podemos realizar la transformada, tomando en cuenta que el argumento de la función trigonométrica es igual al argumento del escalón unitario.	$\mathcal{L}\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mu\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ $\left(\frac{s}{s^2+1}\right)e^{-\pi s/2}$

$$\left(\frac{s}{s^2+1}\right)e^{-\pi s/2}$$

TEMA 4

Calcular la transformada inversa de las siguientes funciones

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(5-4s)e^{-4s}}{s^2+7s+10}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-1}{(s^3+4s)(s-5)}\right\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para realizar el ejercicio a) debemos verificar si el denominador de la fracción se puede descomponer en factores para luego poder separarlos en fracciones parciales, pero esto será únicamente si se pueden descomponer en n factores.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(5-4s)e^{-4s}}{(s+5)(s+2)}\right\}$ $\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s+2}$
2.	Se buscan los valores de las fracciones parciales y se sustituyen por la expresión anterior, estos valores de fracciones parciales se pueden determinar mediante la utilización de una calculadora programable.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{13}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{25}{3}\frac{1}{s+5}\right]e^{-4s}\right\}$
3.	Se realiza la transformada inversa de Laplace normal, pero en cada valor de t se deberá sustituir por el termino t=(t-4).	$\left[\frac{13}{3}e^{-2(t-4)}-\frac{25}{3}e^{-5(t-4)}\right]\mu(t-4)$

$$\left[\frac{13}{3}e^{-2(t-4)}-\frac{25}{3}e^{-5(t-4)}\right]\mu(t-4)$$