UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-2-V-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**14 de octubre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
COORDINADOR:	**Ing. Alfonso Velásquez**

Universidad de San Carlos de Guatemala | **Matemática Aplicada 1**
Facultad de Ingeniería | **Segundo Parcial**
Departamento de Matemática | **141019**

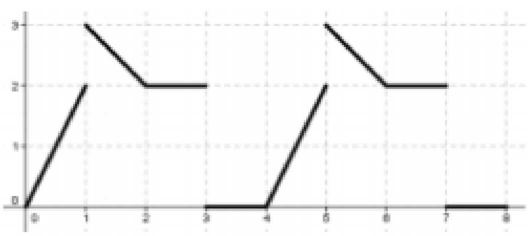
TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integrodiferencial

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + sen(t)$$

TEMA 2

Dada la siguiente función periódica, conteste lo siguiente:



a) ¿Cuál es el periodo de la función?
b) ¿Cuál es la ecuación de la función en el primer periodo?
c) ¿Cuál es la transformada de la función periódica?

TEMA 3

Resuelva lo siguiente:

a) $\mathcal{L}\{te^{-3t}sen(2t)\}$
b) $\mathcal{L}\{t\int_0^t \cos(\tau)d\tau\}$
c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{ln\frac{s^2-4}{s^2+9}\right\}$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver la ecuación integrodiferencial

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + sen(t)$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se debe considerar que para resolver ecuaciones integrodiferenciales, normalmente se debe operar una convolución de la siguiente manera	$\mathcal{L}\{f(t) * \cos(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}$ $\mathcal{L}\{f(t) * \cos(t)\} = F(s)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$
2.	Entonces aplicando la transformada de Laplace a toda la ecuación y tomando en cuenta el procedimiento que hicimos en el inciso anterior, obtenemos el siguiente resultado.	$F(s) + 2F(s)\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$
3.	Se procede a factorizar el valor de $F(s)$, operando las fracciones para poder simplificar lo mas que sea posible, para luego sacar las fracciones parciales.	$F(s) = \frac{4s^2+s+5}{(s+1)(s^2+1)}\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$ $F(s) = \frac{4s^2+s+5}{(s+1)^3}$ $\frac{4s^2+s+5}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$
4.	Se arma un sistema de ecuaciones para poder determinar los valores de A, B y C.	$A = 4, B = -7\ y\ C = 8$
5.	Se sustituyen los valores que encontramos en fracciones parciales y luego se procede a realizar la transformada inversa de Laplace.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+1} - \frac{7}{(s+1)^2} + \frac{8}{(s+1)^3}\right\}$

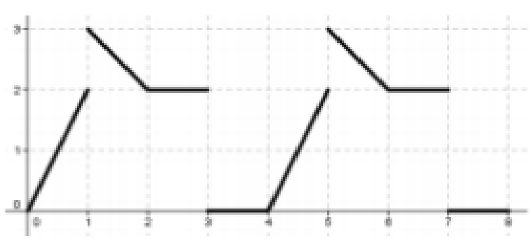
6.	Se realizan las transformadas inversas correspondientes, quedando de la siguiente manera.	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+1}\right\} = 4e^{-t}$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{(s+1)^2}\right\} = -7e^{-t}t$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8(2!)}{(2!)(s+1)^3}\right\} = 4e^{-t}t^2$

El resultado de la ecuación integrodiferencial

R./ $\mathrm{f}(t) = 4e^{-t} - 7e^{-t}t + 4e^{-t}t^2$

TEMA 2

Dada la siguiente función periódica, conteste lo siguiente:



a) ¿Cuál es el periodo de la función?
b) ¿Cuál es la ecuación de la función en el primer periodo?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver el inciso a) debemos de visualizar que la gráfica inicia con una pendiente positiva y ver en qué valor se repite esta pendiente.	$T = 4$
2.	Para definir la función que se expresa en el tema 2, podemos utilizar los valores de la gráfica, la ecuación de la pendiente y la ecuación de la recta.	La ecuación de la pendiente $m = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}$ La ecuación de la recta $Y - Y_0 = m(X - X_0)$

3.	Usando las ecuaciones que planteamos en el inciso anterior, podemos definir la función definida por tramos de la siguiente manera para resolver el inciso b).	$f(t)=\begin{cases}2t & 0\le t<1\\ 4-t & 1\le t<2\\ 2 & 2\le t<3\\ 0 & 3\le t<4\end{cases}$

$$f(t)=\begin{cases}2t & 0\le t<1\\ 4-t & 1\le t<2\\ 2 & 2\le t<3\\ 0 & 3\le t<4\end{cases}$$

c) ¿Cuál es la transformada de la función periódica?

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para el inciso c) se debe de utilizar la siguiente formula, utilizada para realizar la transformada de Laplace de una función periódica.	$F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\left[\int_0^T f(t)e^{-st}dt\right]$
2.	Como es una función definida por partes, entonces debemos de separar la integral por medio de cada uno de los tramos de la función.	$F(s)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\int_0^1 2te^{-st}dt+\int_1^2(4-t)e^{-st}dt+\int_2^3 2e^{-st}dt+\int_3^4(0)e^{-st}dt\right]$
3.	Se resuelve cada una de las integrales de esta función para poder determinar la transformada de Laplace de la función periódica, usando integración por partes entre otras técnicas que se pueden presentar.	$F(s)=\frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\frac{e^{-s}-2e^{-3s}}{s}+\frac{2+e^{-2s}-3e^{-s}}{s^2}\right]$

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-4s}}\left[\frac{e^{-s}-2e^{-3s}}{s} + \frac{2+e^{-2s}-3e^{-s}}{s^2}\right]$$

TEMA 3

Resuelva lo siguiente:

$\mathcal{L}\{te^{-3t}sen(2t)\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver este problema debemos de recordar dos teoremas importantes, teorema de traslación y el teorema de la derivada, el orden en el cual se utilicen estos teoremas no es relevante.	$(-1)^1 \frac{d}{ds}[\mathcal{L}\{sen(2t)\}_{s\to s+3}]$
2.	En este caso primer se aplica el teorema de traslación y luego se aplica el teorema de la derivada, para poder resolver este problema, quedando de la siguiente manera.	$-\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]_{s\to s+3}$ $-\frac{d}{ds}\left[\frac{2}{(s+3)^2+4}\right]$
3.	Como ultimo paso debemos realizar la derivada con respecto a s de la siguiente expresión quedando de la respuesta final.	$\frac{-(0-2(2(s+3)))}{((s+3)^2+4)^2}$ $\frac{4(s+3)}{((s+3)^2+4)^2}$

$$\frac{4(s+3)}{((s+3)^2+4)^2}$$

b) $\mathcal{L}\{t\int_0^t \cos(\tau)d\tau\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para realiza este ejercicio debemos recordar que la transformada de Laplace de una integral es de la siguiente manera, tomando en cuenta que también se ve afectado por el teorema de la derivada.	$-\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(\tau)\,d\tau\right\}\right]$
2.	Se realiza la transformada de Laplace de la función cos(t) y de la integral, para luego poder realizar la derivada de la función con respecto a s.	$-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}\right]$ $-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$
3.	Luego de realizar la derivada de la funcion y simplificar la operación del inciso anterior nos queda la siguiente respuesta.	$\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

$$\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{ln\frac{s^2-4}{s^2+9}\right\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para realiza este ejercicio debemos de tomar en cuenta la siguiente ecuación que corresponde al segundo teorema de la derivada.	$-\frac{1}{t}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}\right]$
2.	También se debe recordar las propiedades de logaritmos, recordando que la división se puede expresar en términos de una resta.	$ln\frac{s^2-4}{s^2+9} = ln(s^2-4) - \ln(s^2+9)$
3.	Luego de recordar las propiedades anteriores, procedemos a sustituir el inciso 2 en el inciso 1, realizando la derivada con respecto a s.	$-\frac{1}{t}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(ln(s^2-4) - \ln(s^2+9)\right)\right\}\right]$ $-\frac{1}{t}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-4)} - \frac{2s}{(s^2+9)}\right\}\right]$

4.	Se realiza la transformada inversa de Laplace de cada una de las derivadas que realizamos en el inciso anterior, quedando de la siguiente forma.	$-\frac{1}{t}[2\cosh(2t) - 2\cos(3t)]$

$$-\frac{1}{t}[2\cosh(2t) - 2\cos(3t)]$$