UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-3-M-2-00-2019_SC

CURSO:	Matemática Aplicada 1
SEMESTRE:	Segundo
CÓDIGO DEL CURSO:	118
TIPO DE EXAMEN:	Tercer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	13 de noviembre de 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Jorge Paredes
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Jorge Paredes
COORDINADOR:	Ingeniero Alfonso Velasquez

Tema 1

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 3y \end{aligned}$$

Tema 2

Resuelva el sistema lineal

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} X$$

Tema 3

Encuentre dos series de potencia de las ecuación diferencial respecto al punto ordinario $x = 0$

$$y'' - xy' - x^2 y = 0$$

Solución Tema 1

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x-4y\\ \frac{dy}{dt} &= 4x+3y\end{aligned}$$

Primero se plantea el problema en forma matricial

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X$$

Luego se encuentran los valores propios utilizando $|A-\lambda I| = 0$

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}\\ &= (3-\lambda)^2+16\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}(3-\lambda)^2+16 &= 0\\ 9-6\lambda+\lambda^2+16 &= 0\\ \lambda^2-6\lambda+25 &= 0\end{aligned}$$

Por lo que los valores propios son:

$$\lambda_1 = 3+4i \qquad \lambda_2 = 3-4i$$

Ahora se encuentra el vector propio utilizando el valor propio $\lambda_1 = 3+4i$

$$(A-\lambda I)k = 0$$

Se tiene que

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -4i & -4 \\ 4 & -4i \end{pmatrix}$$

Planteando la matriz aumentada, se tiene

$$\begin{pmatrix} -4i & -4 & | & 0 \\ 4 & -4i & | & 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} -4i & -4 & | & 0 \\ 4 & -4i & | & 0 \end{pmatrix}_{F_2 = F_2 - iF_1} = \begin{pmatrix} -4i & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}^{F_1 = -\frac{1}{4}F_1} = \begin{pmatrix} i & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto se encuentra que el vector propio es

$$k = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

La primera solución será

$$X_1 = C_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(4t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] e^{3t}$$

La solución para el segundo valor propio será igual que el primero pero su conjugado, por lo que la segunda solución es

$$X_2 = C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] e^{3t}$$

La solución del problema es:

$$\boxed{X = C_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(4t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(4t) \right] e^{3t}}$$

Solución Tema 2

Resuelva el sistema lineal

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} X$$

Primero se encuentran los valores propios utilizando $|A - \lambda I| = 0$. Utilizando un programa CAS se resolvió el determinante de la matriz y se tiene que,

$$|A - \lambda I| = -6 + 5\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Resolviendo el sistema, se tiene que los valores propios son:

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 1$$

Ahora se encuentra el vector propio para el valor propio $\lambda_1 = -2$ utilizando $(A - \lambda I)k = 0$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 2 & 2 \\ -5 & -4-\lambda_1 & -2 \\ 5 & 5 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) & 2 & 2 \\ -5 & -4-(-2) & -2 \\ 5 & 5 & 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Se plantea la matriz aumentada y se resuelve el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 = F_3 \\ F_3 = F_3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \\ -5 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F_2 = \tfrac{1}{3}F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que se tiene que $k_2 = k_3$ y escogiendo un $k_2 = 1$ se tiene un $k_3 = -1$ y con esto se encuentra k_1 por lo que el vector propio es

$$k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Y la primera solución es

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Ahora se encuentra el vector propio para el valor propio $\lambda_2 = 3$ utilizando $(A - \lambda I)k = 0$

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 2 & 2 \\ -5 & -4-\lambda_2 & -2 \\ 5 & 5 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(3) & 2 & 2 \\ -5 & -4-(3) & -2 \\ 5 & 5 & 3-(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -7 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la matriz aumentada y se resuelve el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -7 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 = F_3 \\ F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 = \frac{1}{5}F_1 \\ F_2 = -\frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = F_3 + F_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que se tiene que $k_1 + k_2 = 0$ y que $k_2 + k_3 = 0$. Se encuentra el valor del vector propio y es:

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y la segunda solución es

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Ahora se encuentra el vector propio para el valor propio $\lambda_3 = 1$ utilizando $(A - \lambda I)k = 0$

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda_3 & 2 & 2 \\ -5 & -4-\lambda_3 & -2 \\ 5 & 5 & 3-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(1) & 2 & 2 \\ -5 & -4-(1) & -2 \\ 5 & 5 & 3-(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -5 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Se plantea la matriz aumentada y se resuelve el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = -F_2 \\ F_3 = F_3 + F_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F_2 = F_2 - 5F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que $k_3 = 0$ y así $k_1 = -k_2$. Escogiendo $k_1 = 1$ se tiene que el vector propio es

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y la tercera solución es

$$X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

La solución del problema es:

$$\boxed{X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t}$$

Solución Tema 3

Encuentre dos series de potencia de las ecuación diferencial respecto al punto ordinario $x = 0$

$$y'' - xy' - x^2y = 0$$

Se utiliza

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

y se sustituye y, y', y'' con la sumatoria y se tiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

Ya que en algunos terminos se encuentra x, se mete en la sumatoria y se arregla algebraicamente

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0$$

Ahora se cuentran los valores de k

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}}_{\substack{k=n-2\\ n=k+2}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n}_{\substack{k=n\\ n=k}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}}_{\substack{k=n+2\\ n=k-2}} = 0$$

Se sustituye con los valores de k

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^k = 0$$

Como $k = 2$ es el valor más grande como subndice en las sumatorias, se evalúa en en $k = 0$ y $k = 1$ hasta que todas estén en $k = 2$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k}_{k=0,\quad k=1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} kC_k x^k}_{k=1} - \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^k}_{\text{Valor k más grande}} = 0$$

Se opera y se tiene

$$2C_2 + 6C_3x - C_1x\sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} kC_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}x^k = 0$$

Ahora como dentro de las sumatorias todas las k son del mismo grado y la sumatoria tienen el mismo subindice, se simplifica las sumatorias a:

$$2C_2+(6C_3-C_1)x+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+2)(k+1)C_{k+2}-kC_k-C_{k-2}]x^k=0$$

Por lo que se tiene que $C_2=0$ y $C_3=\frac{1}{6}C_1$. Para hayar los demás valores de C_k se utiliza

$$C_{k+2}-=\frac{kC_k+C_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$$

Se hayan los demás valores de C_k

k	$C_{k+2}=\frac{kC_k+C_{k-2}}{(k+2)(k+1)}$
2	$C_4=\frac{2C_2+C_0}{12}=\frac{C_0}{12}$
3	$C_5=\frac{3C_3+C_1}{20}=\frac{3C_1}{40}$
4	$C_6=\frac{4C_4+C_2}{30}=\frac{C_0}{90}$
5	$C_7=\frac{5C_5+C_3}{42}=\frac{13C_1}{1008}$
6	$C_8=\frac{6C_6+C_4}{56}=\frac{3C_0}{1120}$
$\vdots$	$\vdots$

Por lo que la solución será

$$y=C_0+C_1x+\underbrace{\frac{1}{6}C_1x^3}_{C_3}+\underbrace{\frac{1}{12}C_0x^4}_{C_4}+\underbrace{\frac{3}{40}C_1x^5}_{C_5}+\underbrace{\frac{1}{90}C_0x^6}_{C_6}+\underbrace{\frac{13}{1008}C_1x^7}_{C_7}+\underbrace{\frac{3}{1120}C_0x^8}_{C_8}+\cdots$$

Agrupando se tiene

$$y=C_0\left(1+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{90}x^6+\frac{3}{1120}x^8+\cdots\right)+C_1\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{13}{1008}x^7+\cdots\right)$$

La solución del problema es:

$$\boxed{y=C_0\left(1+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{90}x^6+\frac{3}{1120}x^8+\cdots\right)+C_1\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{13}{1008}x^7+\cdots\right)}$$