UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-3-V-3-00-2019

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**13 de noviembre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Pedro Chamale**

TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x'' + y'' &= e^{2t} \\ 2x' + y'' &= -e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

TEMA 2

Resuelva el sistema lineal

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} X$$

TEMA 3

Encuentre dos series de potencia de la ecuación diferencial respecto al punto ordinario x=0

$$(x^2 + 1)y'' + 6xy' + 4y = 0$$

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Matemática Aplicada 1
Tercer Parcial
131119

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1

Use la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$x'' + y'' = e^{2t}$$
$$2x' + y'' = -e^{2t}$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0$$
$$x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td colspan="2">Primero se debe conocer que existen dos métodos para poder resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. 1) Por eliminación 2) Método de Crammer. En esta ocasión resolveremos el sistema con el método 2. Debemos realizar la transformada de la Laplace para ambas ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="2">$$\mathcal{L}\{x'' + y'' = e^{2t}\}$$ $$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{1}{s-2}$$ $$s^2X(s) + s^2Y(s) = \frac{1}{s-2}$$ $$\mathcal{L}\{2x' + y'' = -e^{2t}\}$$ $$2sX(s) - x(0) + s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{-1}{s-2}$$ $$2sX(s) + s^2Y(s) = \frac{-1}{s-2}$$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Luego de haber realizado la transformada de la Laplace, procedemos a encontrar 3 factores $(\Delta, \Delta_x \; y \; \Delta_y)$ importantes para poder darle solución al sistema, los deltas los encontraremos de la siguiente manera.</td><td>$$\begin{vmatrix} X(s) & Y(s) & = & B \\ s^2 & s^2 & & \frac{1}{s-2} \\ 2s & s^2 & & \frac{-1}{s-2} \end{vmatrix}$$ $$\Delta = \begin{vmatrix} s^2 & s^2 \\ 2s & s^2 \end{vmatrix} = s^4 - 2s^3$$ $$\Delta_x = \begin{vmatrix} s^2 & \frac{1}{s-2} \\ 2s & \frac{-1}{s-2} \end{vmatrix} = \frac{-s^2 - 2s}{(s-2)}$$ $$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{s-2} & s^2 \\ \frac{-1}{s-2} & s^2 \end{vmatrix} = \frac{2s^2}{(s-2)}$$</td></tr>
</table>

4.	Luego para poder obtener la solución de x(t) debemos dividir $\Delta_x$dentro de Δ y se hace lo mismo para obtener la solución de y(t).	$X(s)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-\frac{(s+2)}{s^2(s-2)^2}$ $Y(s)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{2}{s(s-2)^2}$
5.	Se procede a realizar fracciones parciales para poder realizar la transformada inversa de la Laplace para poder encontrar la respuesta del sistema.	$X(s)=-\frac{(s+2)}{s^2(s-2)^2}=\frac{3}{4}*\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{3}{4}*\frac{1}{s}-\frac{1}{2}*\frac{1}{s^2}$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{4}*\frac{1}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{3}{4}*\frac{1}{s}-\frac{1}{2}*\frac{1}{s^2}\right\}$ $x(t)=\frac{3}{4}e^{2t}-te^{2t}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t$ $Y(s)=\frac{2}{s(s-2)^2}=-\frac{1}{2}*\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{2}*\frac{1}{s}$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}*\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{1}{2}*\frac{1}{s}\right\}$ $y(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}+te^{2t}+\frac{1}{2}$

El resultado del sistema

R./ $x(t)=\frac{3}{4}e^{2t}-te^{2t}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t$

$y(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}+te^{2t}+\frac{1}{2}$

TEMA 2

Resuelva el sistema lineal

$$X'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}X$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para resolver el sistema lineal debemos realizar la siguiente operación matricial.	$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$

2.	Se realiza la operación matricial y luego se procede a calcular el determinante de la matriz resultante para poder encontrar los valores de λ.	$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 4$
3.	Luego para encontrar los valores del vector debemos de sustituir cada uno de los valores de λ para determinar los valores correspondientes.	$\lambda_1 = -3$ $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} F_{3 \to} F_{3 -} F_1$ $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $4K_2 + 3K_3 = 0$ $4K_1 - K_2 + K_3 = 0$ $K_3 = 16$ $K_2 = \frac{-3}{4} K_3$ $K_1 = \frac{K_2 - K_3}{4}$
4.	Se realiza lo mismo para los demás valores de λ.	$\lambda_2 = 2$ $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} F_{3 \to} F_3 + 4F_1$ $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $-K_2 + 3K_3 = 0$ $-K_1 - K_2 + K_3 = 0$ $K_3 = 1$ $K_2 = 3K_3$ $K_1 = \frac{K_3 - K_2}{1}$
5.	Se hace lo mismo para el ultimo valor de λ.	$\lambda_3 = 4$ $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} F_{3 \to} 3F_3 + 4F_1$ $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ $-3K_2 + 3K_3 = 0$ $-3K_1 - K_2 + K_3 = 0$ $K_3 = 1$ $K_2 = K_3$ $K_1 = \frac{K_3 - K_2}{3}$

6.	Luego queda únicamente expresar la solución general del sistema de la siguiente manera.	$x(t) = C_1\begin{pmatrix}-7\\-12\\16\end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t}$

$$x(t) = C_1\begin{pmatrix}-7\\-12\\16\end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t}$$

TEMA 3

Encuentre dos series de potencia de la ecuación diferencial respecto al punto ordinario x=0

$$(x^2+1)y'' + 6xy' + 4y = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se sustituye todos los términos de “y” en términos de las series correspondientes de la siguiente manera. Reduciendo y simplificando cada termino que se pueda según sea el caso.	$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}C_n$ $y' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}C_n$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n C_n$

2.

$$(x^2+1) * \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}C_n + 6x * \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}C_n + 4 * \sum_{n=0}^{\infty} x^n C_n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n C_n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}C_n + 6\sum_{n=1}^{\infty} nx^n C_n + 4\sum_{n=0}^{\infty} x^n C_n = 0$$

Luego debemos lograr que todos los exponentes de x sean igual a x^n, lo logramos haciendo una sustitución de k.

$$k = n \qquad \begin{matrix} k = n-2 \\ n = k+2 \end{matrix} \qquad k = n \qquad k = n$$

Procedemos a realizar la sustitución correspondiente en la ecuación anterior en cada una de las series, tomando en cuenta que para cada serie se realizara una sustitución diferente para cada una de ellas de la siguiente manera:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k C_k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k C_{k+2} + 6\sum_{k=1}^{\infty} kx^k C_k + 4\sum_{k=0}^{\infty} x^k C_k = 0$$

Como siguiente paso debemos realizar que todas las series deben iniciar con el subíndice k del mismo valor en este caso k=2. Eso lo realizamos evaluando cada una de las series que no se encuentran en subíndice menor, hasta llegar a k=2.

$$2C_2 + 6C_3x + 6C_1x + 4C_0 + 4C_1x + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k C_k + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k C_{k+2} + 6\sum_{k=2}^{\infty} kx^k C_k + 4\sum_{k=2}^{\infty} x^k C_k = 0$$

$$2C_2 + 6C_3x + 10C_1x + 4C_0 + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)C_k + (k+2)(k+1)C_{k+2} + 6kC_k + 4C_k]x^k = 0$$

Primero tomamos todos las constantes que tengan factor común “x” y luego todas las constantes que no tengan el factor “x”.

$$2C_2 + 4C_0 = 0$$
$$C_2 = -2C_0$$

$$6C_3x + 10C_1x = 0$$
$$C_3 = \frac{-5}{3}C_1$$

Luego debemos despejar el valor mayor de C_k de los valores que se encuentran dentro de la serie, quedando de la siguiente manera.

$$C_{k+2} = \frac{C_k(-6k - 4 - k(k-1))}{(k+2)(k+1)}$$

Procedemos a evaluar a partir del valor de k = 2 para poder determinar el desarrollo de las soluciones.

$$C_4 = \frac{C_2(-12 - 4 - (2))}{(4)(3)} = \frac{-3C_2}{2} = 3C_0$$

$$C_5 = \frac{C_3(-18 - 4 - 6)}{20} = \frac{-7C_3}{5} = \frac{7C_1}{3}$$

$$C_6 = \frac{C_4(-24 - 4 - 12)}{30} = \frac{-4C_2}{3} = -4C_0$$

$$C_7 = \frac{C_5(-30 - 4 - 20)}{42} = \frac{-54C_3}{42} = \frac{-9C_1}{3}$$

Y así sucesivamente hasta desarrollar una cierta cantidad de términos que usted crea conveniente para poder determinar las dos series de potencias que son solución de dicha ecuación diferencial.

La solución general es de la siguiente forma

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$$

La primera solución se dará de la siguiente forma

$$c_0 = 1 \qquad c_1 = 0$$

$$y_1(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + \cdots$$
$$y_1(x) = [c_0 - 2c_0x^2 + 3c_0x^4 + 4c_0x^6 + \cdots]$$
$$y_1(x) = c_0[1 - 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \cdots]$$

Determinamos el patrón para la primera solución.

$$y_1(x) = C_0\sum_0^\infty(-1)^n x^{2n}(n+1)$$

La segunda solución se dará de la siguiente forma

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 1$$

$$y_2(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \cdots$$
$$y_2(x) = [c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \cdots]$$
$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3}x^5 + \frac{9}{3}x^7 + \cdots\right]$$

Determinamos el patrón para la segunda solución.

$$y_2(x) = C_1\sum_0^\infty(-1)^n x^{2n+1}\frac{(2n+1)}{3}$$

$$y_1(x) = C_0\sum_0^\infty(-1)^n x^{2n}(n+1)$$

$$y_2(x) = C_1\sum_0^\infty(-1)^n x^{2n+1}\frac{(2n+1)}{3}$$

Cualquier duda o comentario me pueden escribir al siguiente correo chamaleperez@hotmail.com