UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-4-M-2-00-2019-S-A

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**19 de noviembre del 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Andrés Fernando Divas Cojti**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Andrés Fernando Divas Cojti**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

INSTRUCCIONES: Escriba o Marque la Respuesta Correcta (según sea el caso) a cada uno de los planteamientos siguientes, en las series 1, 2 y 3 (NAC significa Ninguna de las Anteriores es correcta).

TEMA 1 (28 pts, 7 pts c/u):

1.1 Que teorema se le pueden aplicar a la siguiente transformada $\mathcal{L}\{e^t f(t)\}$ sabiendo que "n" es un número natural.

a) 1er. Teorema de traslación	**b)** Derivada de una trasformada	**c)** Teorema de Convolución	**d)** a y b son correctas	**e)** **NAC**

1.2 Calcular $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2\tau} g(\tau)\, d\tau\right\}$

a) $\frac{G(s-1)}{s+1}$	**b)** $\frac{G(s-3)}{s-1}$	**c)** $\frac{G(s-2)}{s(s-1)}$	**d) NAC**

1.3 La Transformada Inversa de Laplace de la función $F(s) = \frac{4}{s^2-4s}$ es:

a) $f(t) = 1 - e^{4t}$	**b)** $f(t) = 1 - e^{-4t}$	**c)** $f(t) = 2\sinh(2t)$	**d)** $f(t) = e^{4t} - 1$	**e) NAC**

1.4 La transformada de Laplace de $f(t) = \frac{(e^{-2t}-t)^2}{e^t}$ es:

a) $F(s) = \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**b)** $F(s) = \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**c)** $F(s) = \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**d) NAC**

TEMA 2. (25 pts, 5 pts c/u) Se sabe que para el sistema lineal homogéneo $X' = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 10 & 20 & 8 \\ a & 10 & 4 \end{pmatrix}$, uno de sus valores propios es 10.

2.1. ¿Cuál es el valor de la constante "a" que cumple con la indicación?

a) 0	**b)** 2	**c)** -1	**d) NAC**

2.2. Cual es el conjunto de valores propios del sistema:

a) $\lambda = 4, 10, 14$	**b)** $\lambda = 10\ ,\ 4 \pm 2i$	**c)** $\lambda = 10, 0, 0$	**d) NAC**

2.3. El vector propio que le corresponde a $\lambda = 10$ es:

a) $\overline{K} = (-7\,,3\,,5\,)^t$	**b)** $\overline{K} = (-4\,,0\,,5)^t$	**c)** $\overline{K} = (7\,,3\,,1-2i)^t$	**d) NAC**

2.4. Escriba la solución general del sistema:

2.5 Para un sistema se sabe que los valores y vectores propios son $\overline{K}_{\lambda=2} = (\,3\,,1\,,2\,)^t$, $\overline{K}_{\lambda=1+i} = (\,1\,,2-i\,,3\,)^t$, Escriba en el siguiente espacio la solución general de dicho sistema:

TEMA 3. 20 pts. (5 pts c/u): Una masa que pesa 80 libras alarga un resorte 2 pies, llegando a la posición de equilibrio. La masa se libera al inicio desde el reposo de un punto 12 pulgadas arriba de la posición de equilibrio dentro de un medio proporciona una fuerza de amortiguamiento equivalente a 20 veces la velocidad instantanea, Determinar lo siguiente:

3.1. Cuál es la constante "k" del resorte

a) $k = 40\ {}^{nt}/_{mt}$	**b)** $k = 40\ {}^{lb}/_{pie}$	**c)** $k = 20\ {}^{lb}/_{pie}$	**d) NAC**

3.2. Cuál es el valor de la masa en Slugs:

a) $m = 80$	**b)** $m = 8.16$	**c)** $m = 5$	**d) NAC**

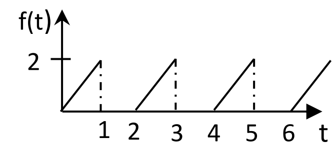
3.3. Cual de las siguientes ecuaciones es equivalente a la ecuación del sistema después haber sido transformada y aplicadas condiciones iniciales.:

a) $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) - 16X(s) = -1$	**b)** $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) + 16X(s) = 1$	**c)** $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) + 16X(s) = -1$	**d) NAC**

3.4. Cuál es la posición (en pulgadas) de la masa en el instante $t=1$ segundos:

a) -0.175	**b)** -0.2198	**c)** 0.1523	**d) NAC**

TEMA 4. (12 pts, 4 c/u):



Para la Función Periódica mostrada en la gráfica indique **1**: Período de la función,

2. Función $f(t)$ sobre el primer período **3**. La transformada de Laplace de la Función.

1:____________________ **2:**________________________________

3:____

Tema 5 (15 pts):

Para la ecuación diferencial $(x^2-1)y''+2xy'=0$ determine 2 soluciones linealmente independientes en forma de series en torno al punto singular $x_0=0$, DEJANDO CONSTANCIA DE TODO SU PROCEDIMIENTO EN EL ESPACIO A CONTINUACIÓN.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1 (28 pts, 7 pts c/u):

1.1 Que teorema se le pueden aplicar a la siguiente transformada $\mathcal{L}\{e^{t}f(t)\}$ sabiendo que "n" es un número natural.

a) 1er. Teorema de traslación	**b)** Derivada de una trasformada	**c)** Teorema de Convolución	**d)** a y b son correctas	**e)** NAC

1.2 Calcular $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}g(\tau)\,d\tau\right\}$

a) $\frac{G(s-1)}{s+1}$	**b)** $\frac{G(s-3)}{s-1}$	**c)** $\frac{G(s-2)}{s(s-1)}$	**d)** NAC

No.	Explicación	Operatoria
1.	Aquí es aplicación de concepto, aplicamos la definición de convolución y el primer teorema de traslacion y obtenemos de forma directa la solicion:	$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}g(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{G(s-1)}{s+1}$

+1.3 La Transformada Inversa de Laplace de la función $F(s) = \frac{4}{s^2-4s}$ es:

a) $f(t) = 1 - e^{4t}$	**b)** $f(t) = 1 - e^{-4t}$	**c)** $f(t) = 2\sinh(2t)$	**d)** $f(t) = e^{4t} - 1$	**e)** NAC

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero aplicamos factor común a nuestra expresión en el denominador:	$F(s) = \frac{4}{s(s-4)}$
2.	Aplicando Fracciones parciales obtenemos que:	$F(s) = \frac{1}{s-4} - \frac{1}{s}$
3.	Ahora aplicamos la transformada de Laplace y obtenemos la siguiente función:	$f(t) = e^{-4t} - 1$

1.4 La transformada de Laplace de $f(t) = \frac{(e^{-2t} - t)^2}{e^t}$ es:

a) $F(s) = \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**b)** $F(s) = \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**c)** $F(s) = \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{s+5} + \frac{2}{(s+1)^3}$	**d) NAC**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero aplicamos factor común a nuestra expresión en el denominador:	$f(t) = \frac{(e^{-2t} - t)^2}{e^t}$
2.	Ahora desarrollamos el cuadrado:	$f(t) = \frac{e^{-4t} - 2e^{-2t} + t^2}{e^t}$
3.	Ahora desarrollamos la división:	$f(t) = e^{-5t} - 2e^{-3t} + t^2 e^{-t}$
4.	Ahora por medio de Voyage obtenemos el resultado:	$F(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{2}{(s+3)^3}$

TEMA 2. (25 pts, 5 pts c/u) Se sabe que para el sistema lineal homogéneo $X' = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 10 & 20 & 8 \\ a & 10 & 4 \end{pmatrix}$, uno de sus valores propios es 10.

2.1. ¿Cuál es el valor de la constante "a" que cumple con la indicación?

a) 0	**b)** 2	**c)** -1	**d) NAC**

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Primero sacamos los valores propios, pero en este caso ya nos dan el valor de un varlo propio el cual es 10:	$X' = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -14 & 0 \\ 10 & 20-\lambda & 8 \\ a & 10 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
2.	Ahora nuestra matriz queda de la siguiente manera igualada a 0.	$\begin{pmatrix} 4-10 & -14 & 0 \\ 10 & 20-10 & 8 \\ a & 10 & 4-10 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} -6 & -14 & 0 \\ 10 & 10 & 8 \\ a & 10 & -6 \end{pmatrix}$=0
3.	Sacamos su determinante y hallamos el valor de a-	$-6[(10*-6)-(10*8)]+14[(10*-6)-(8a)]=0$
4.	El valor de a queda:	$a = 0$

2.2. Cual es el conjunto de valores propios del sistema:

a) $\lambda = 4, 10, 14$	**b)** $\lambda = 10\ ,\ 4 \pm 2i$	**c)** $\lambda = 10, 0, 0$	**d) NAC**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Primero sacamos los valores propios, pero en este caso ya nos dan el valor de un varlo propio el cual es 10:	$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -14 & 0 \\ 10 & 20-\lambda & 8 \\ a & 10 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
2.	Aplicando determinante tenemos que:	$-8[10(4-\lambda) + 14a] + (4-\lambda)[(4-\lambda)(20-\lambda) + 140] = 0$
3.	Factor común:	$(4-\lambda)(-80 + 220 - 24\lambda + \lambda^2) = 0$
4.	Valores propios obtenemos:	$\lambda = 4$ $\lambda = 14$ $\lambda = 10$

2.3. El vector propio que le corresponde a $\lambda = 10$ es:

a) $\overline{K} = (-7, 3, 5)^t$	**b)** $\overline{K} = (-4, 0, 5)^t$	**c)** $\overline{K} = (7, 3, 1-2i)^t$	**d) NAC**

No.	Explicación	Operatoria
1.	Por medio de programa de Voyage o GeoGebra podremos obtener la solución de nuestros valores propios, para lambda = 10	$\begin{pmatrix} -6k_1 & -14k_2 & 0k_3 \\ 10k_1 & 10k_2 & 8k_3 \\ 0k_1 & 10k_2 & -6k_3 \end{pmatrix}$=0
2.	Solucion	Soluciones({-6x-14y=0,10x+10y+8z=0,10y-6z=0},{x,y,z}) $\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}z & \frac{3}{5}z & z \end{pmatrix}$

2.4. Escriba la solución general del sistema:

No.	Explicación	Operatoria
1.	Para lambda = 4	$\begin{pmatrix} 0k_1 & -14k_2 & 0k_3 \\ 10k_1 & 16k_2 & 8k_3 \\ 0k_1 & 10k_2 & 0k_3 \end{pmatrix} = 0$
2.	Solucion	Soluciones({-0x-14y=0,10x+16y+8z=0,10y-0z=0},{x,y,z}) $\rightarrow \left(-\frac{4}{5}z \quad 0 \quad z \right)$
3.	Para lambda = 14	$\begin{pmatrix} -10k_1 & -14k_2 & 0k_3 \\ 10k_1 & 4k_2 & 8k_3 \\ 0k_1 & 10k_2 & -10k_3 \end{pmatrix} = 0$
4.	Solucion	Soluciones({-10x-14y=0,10x+4y+8z=0,10y-10z=0},{x,y,z}) $\rightarrow (0 \quad 0 \quad 0)$
5.	La solución general es:	$\boldsymbol{x(t) = c_0 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{10t} + c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} e^{4t}}$

2.5 Para un sistema se sabe que los valores y vectores propios son $\bar{K}_{\lambda=2} = (3,1,2)^t$, $\bar{K}_{\lambda=1+i} = (1, 2-i, 3)^t$, Escriba en el siguiente espacio la solución general de dicho sistema:

$\boldsymbol{x(t) = c_0 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+i)t}}$

<u>TEMA 3. 20 pts. (5 pts c/u):</u> Una masa que pesa 80 libras alarga un resorte 2 pies, llegando a la posición de equilibrio. La masa se libera al inicio desde el reposo de un punto 12 pulgadas arriba de la posición de equilibrio dentro de un medio proporciona una fuerza de amortiguamiento equivalente a 20 veces la velocidad instantánea, Determinar lo siguiente:

3.1. Cuál es la constante "k" del resorte

a) $k = 40\ {}^{nt}/_{mt}$	**b)** $k = 40\ {}^{lb}/_{pie}$	**c)** $k = 20\ {}^{lb}/_{pie}$	**d) NAC**

3.2. Cuál es el valor de la masa en Slugs:

a) $m = 80$	**b)** $m = 8.16$	**c)** $m = 5$	**d) NAC**

3.3. Cual de las siguientes ecuaciones es equivalente a la ecuación del sistema despues haber sido transformada y aplicadas condiciones iniciales.:

a) $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) - 16X(s) = -1$	**b)** $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) + 16X(s) = 1$	**c)** $s^2X(s) + 8\,s\,X(s) + 16X(s) = -1$	**d) NAC**

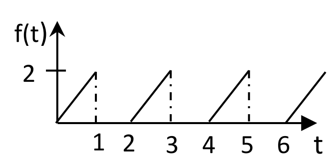
3.4. Cuál es la posición (en pulgadas) de la masa en el instante $t=1$ segundos:

a) -0.175	**b)** -0.2198	**c)** 0.1523	**d) NAC**

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Primero debemos sacar las condiciones iniciales, si leemos detenidamente me indica que al inicio se tiene el resorte con una velocidad 0 y una posición de 12 pulgadas arriba de su punto de equilibrio y sabemos que un pie es igual a 12 pulgadas, entonces obtenemos que:	X(0)=-1 X´(0)=0
2.	También nos piden sacar la constante del resorte y al tener la sumatoria de fuerzas igualada a 0 (se iguala a 0 por la condición en equilibrio) se obtiene la siguiente ecuación.	$W = KX$ $K = \frac{W}{X}$
3.	Tenemos el peso de 80lb y la distancia que se estira el resorte y obtenemos nuestra constante.	$K = \frac{80}{2} = 40\frac{lb}{pie}$
4.	Ahora nos piden la masa en slug y sabemos que 1lb=0.031081slug, en este caso solo multiplicamos de la siguiente manera.	80*0.031081= 2.48648 slug
5.	Ahora ingresamos la ecuación diferencial y nos queda:	$\frac{2.5x'' + 20x' + 40x = 0}{2.5}$ $x'' + 8x' + 16x = 0$

6.	Aplicamos la transformada de Laplace en la ecuación diferencial:	$\mathcal{L}(x'' + 8x' + 16x = 0)$ $\mathcal{L}(x'') = (s^2x(s) - sx(0) - x'(0)$ $\mathcal{L}(x') = sx(s) - x(0)$ $\mathcal{L}(x) = x(s)$
7.	Metiendo los datos de nuestra condición inicial obtenemos que:	$s^2x(s) + s + 8sx(s) + 8 + 16x(s) = 0$
8.	Agrupando términos reescribimos la ecuación y obtenemos lo siguiente:	$x(s) = \frac{-8 - s}{s^2 + 8s + 16}$
9	Por medio de una voyage obtenemos	$x(t) = -4te^{-4t} - e^{-4t}$
10	Ahora nos piden la posición en el tiempo 1, y lo sustituimos en la ecuación de x(t) y el resultado es el siguiente:	$x(1) = -0.091\, pies$

TEMA 4. (12 pts, 4 c/u):



Para la Función Periódica mostrada en la gráfica indique **1**: Período de la función,

2. Función $f(t)$ sobre el primer período **3**. La transformada de Laplace de la Función.

No.	**Explicación**	**Operatoria**

1.	Para hallar el período observamos la gráfica y vemos que cada 2 unidades se repite la misma función por ende el periodo es:	T=2.
2.	Ahora obtenemos la función y esta es una función por tramos:	$f(t) = \begin{cases} 2t \; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \; 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
3.	Ahora aplicamos la formula del período:	$\frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} * f(t)dt$
4.	Ahora sustituimos:	$\frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} * 2tdt + \int_1^2 e^{-st} * 2tdt \right]$
5.	Utilizando calculadora Voyage.	$\frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2} \right]$

Tema 5 (15 pts.):

Para la ecuación diferencial $(x^2-1)y''+2xy'=0$ determine 2 soluciones linealmente independientes en forma de series en torno al punto singular $x_0=0$, DEJANDO CONSTANCIA DE TODO SU PROCEDIMIENTO EN EL ESPACIO A CONTINUACIÓN.

1. Primero convertimos nuestras ecuaciones diferenciasl en la definición de las series:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=2}^{\infty} nC_n x^{n-1} = 0$$

2. Ahora trabajamos las series pasando todo a términos de n:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2nC_n x^{n} = 0$$

3. Ahora trabajamos con la variable K.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^{k} - \sum_{n=2}^{\infty} (k+2)(k+1)C_k x^{k} + \sum_{n=2}^{\infty} 2kC_k x^{k} = 0$$

4. Trabajamos las series:

$$-2c_2 - 6c_3x + 2c_1x + \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)C_k - (k+2)(k-1)c_{k+2} + 2kc_k]\,x^k = 0$$

5. Realizamos un cuadro y le damos valores a la variable K y obtener los valores de nuestras constantes y ver como tiende la serie:

$$-2C_2 = 0 \rightarrow\rightarrow C_2 = 0 \qquad -6C_3 + 2C_1 = 0 \rightarrow\rightarrow C_3 = \tfrac{1}{3}C_1$$

K	$C_{K+2} = \frac{K}{K+2}C_K$	
2	$C_4 = \frac{2}{4}C_2$	$C_4 = 0$
3	$C_5 = \frac{3}{5}C_3$	$C_4 = \frac{1}{5}C_1$
4	$C_6 = \frac{4}{6}C_4$	$C_6 = 0$
5	$C_7 = \frac{5}{7}C_5$	$C_7 = \frac{1}{7}C_1$

$$Y = C_0X + C_1X + 0 + \frac{1}{3}C_3X^3 + 0\frac{1}{5}C_5X^5 + \frac{1}{7}C_7X^7 \dots\dots\dots$$

$$Y_1 = C_0$$

6. Ahora vemos como tiende la serie y obtenemos nuestro resultado.

$$Y_2 = C_1X + \frac{1}{3}C_3X^3 + \frac{1}{5}C_5X^5 + \frac{1}{7}C_7X^7 + \cdots \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^{2n-1}}{2n-1}$$