UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-118-4-V-2-00-2019-sP

CURSO:	**Matemática Aplicada 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**118**
TIPO DE EXAMEN:	**Examen Final**
FECHA DE EXAMEN:	**19 de noviembre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Franklin Estuardo Velásquez Fuentes**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Franklin Estuardo Velásquez Fuentes**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

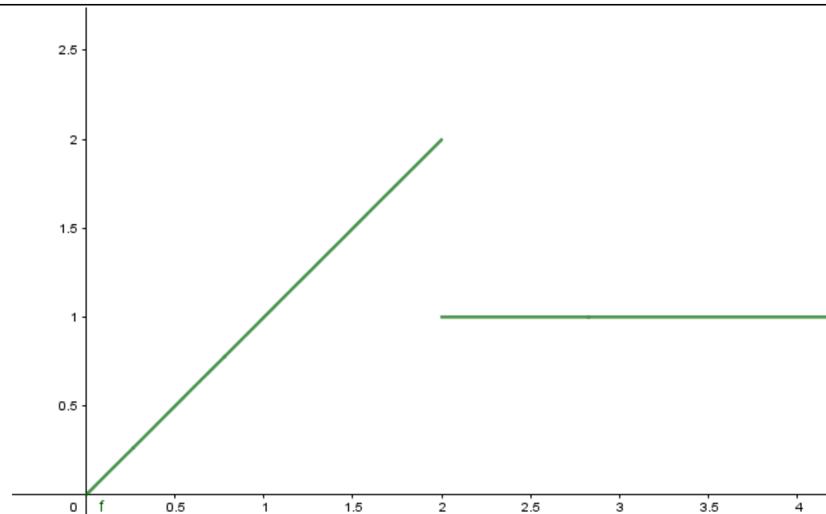
TEMA 1: (20 puntos):

Dada $f(t) = \begin{Bmatrix} t & si & 0 \le t < 2 \\ 1 & si & t > 2 \end{Bmatrix}$

Obtenga:

A) Gráfica (2 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafica sobre los intervalos especificados	$\begin{matrix} t & si & 0 \le t < 2 \\ 1 & si & t > 2 \end{matrix}$

Respuesta	

B) Calcule $F(s)$ usando transformada de Laplace POR DEFINICIÓN. (9 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando la transformada de Laplace por definición se plantea la integral	$F(s) = \int_0^2 te^{-st}dt + \int_2^\infty e^{-st}dt$
2.	Resolviendo la integral y evaluando los límites se tiene	$F(s) = -\frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}e^{-2s}$
3.	Simplificando	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

Respuesta	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

C) Exprese $f(t)$ con funciones escalón y luego calcule su transformada. (9 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Planteando $f(t)$ en escalón	$f(t) = t - tU(t-2) + U(t-2)$
2.	Aplicando transformada de Laplace	$\mathcal{L}\{f(t) = t - tU(t-2) + U(t-2)\}$ $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

Respuesta	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

TEMA 2: (20 puntos):

A) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{se^{-2s}}{(s-1)^2}$ (7 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica transformada inversa de Laplace tomando en cuenta la traslación	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}U(t-2)$
2.	Se reescribe la expresión en fracciones parciales	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}\right\}U(t-2)$
3.	Se resuelve la transformada inversa de Laplace tomando en cuenta la traslación $s-1$	$f(t) = [(1-t)e^t]U(t-2)$
4.	Finalmente se escribe la traslación $t-2$	$f(t) = (1-t-2)e^{t-2}U(t-2)$ $f(t) = (t-1)e^{t-2}U(t-2)$

RESPUESTA	$f(t) = (t-1)e^{t-2}U(t-2)$

B) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$ por transformada de integral (7 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se separa la expresión por sus factores	$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+9)}$
2.	Se plantea la el teorema de convolución	$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+9)} = 1 * \frac{1}{3}\sin 3t$
3.	En forma de integral	$F(s) = 1 * \frac{1}{3}\sin 3t = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3\tau \, d\tau$

4.	Resolviendo la integral	$$F(s) = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3\tau \, d\tau = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}$$

Respuesta	$$F(s) = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}$$

C) Obtenga $F(s)$ si $f(t) = (te^t)^2$ por derivada de transformada (6 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se opera el exponente	$$f(t) = t^2 e^{2t}$$
2.	Se plantea la transformada por el teorema de la derivada de una transformada	$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$
3.	Transformando la expresión	$$F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$
4.	Finalmente se determina la segunda derivada de la expresión	$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

Respuesta	$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

TEMA No.3 (20 Puntos)
Un cuerpo de 64 libras se conecta al extremo de un resorte que cuelga del techo y lo alarga 0.32 pies. Al inicio el cuerpo se libera desde un punto que está a 8 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 5 pies/seg. Obtenga la ecuación del movimiento x(t) usando la transformada de Laplace.

No.	Explicación	Operatoria
1.	En primer lugar todos los datos deben estar en las mismas dimensionales, en este caso para el sistema inglés. Realizando las conversiones necesarias.	$m = \frac{64\ lb}{32} = 2\ slug$ $x(0) = -8\ pulg * \frac{1 \text{ pie}}{12\ pulg} = -\frac{2}{3}\ pie$ $k = \frac{64\ lb}{0.32\ pies} = 200\ lb/pie$ $v_0 = x'(0) = 5\ pies/seg$
2.	Planteando la ecuación diferencial para el sistema de resorte.	$m\frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} + kx = 0$ $mx'' + kx = 0$
3.	Sustituyendo las constantes por los valores conocidos. Para las condiciones iniciales tomar en cuenta que x(0) corresponde a la posición inicial y x'(0) corresponde a la velocidad inicial.	$2x'' + 200x = 0$ $x(0) = -\frac{2}{3} \quad x'(0) = 5$
4.	Dividiendo toda la ecuación dentro de 2 para tener la constante de la derivada igual a 1	$2x'' + 200x = 0\ (\div 2)$ $x'' + 100x = 0$
5.	Aplicando la transformada.	$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + 100x(s) = 0$
6.	Sustituyendo los valores de las condiciones iniciales por los valores conocidos.	$s^2x(s) - s(-\frac{2}{3}) - 5 + 100x(s) = 0$
7.	Se procede a operar y factorizar con el objetivo de despejar x(s)	$s^2x(s) + \frac{2}{3}s - 5 + 100x(s) = 0$

		$s^2x(s) + 100x(s) = 5 - \frac{2}{3}s$ $x(s)(s^2 + 100) = 5 - \frac{2}{3}s$ $x(s) = \frac{5 - \frac{2}{3}s}{s^2 + 100}$
8.	Separando la fracción por módulos y multiplicando la primera fracción por 10/10 para obtener una expresión a aplicar la transformada inversa de Laplace.	$x(s) = \frac{5 - \frac{2}{3}s}{s^2 + 100}$ $x(s) = 5\frac{1}{s^2 + 100} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 100}$ $x(s) = \frac{5}{10}\frac{10}{s^2 + 100} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + 100}$ $x(s) = \frac{5}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2 + 100}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 100}\right\}$
9.	Evaluando la transformada inversa.	$x(t) = \frac{1}{2}\sin(10t) - \frac{2}{3}\cos(10t)$

La Ecuación de Movimiento es:

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(10t) - \frac{2}{3}\cos(10t)$$

TEMA No.4 (20 Puntos)	
A) Usando valores y vectores propios, obtenga la solución general del sistema en la forma: $$X(t) = C_1X_1 + C_2X_2$$ $$\frac{dx}{dt} = x - 8y$$ $$\frac{dy}{dt} = x - 3y$$ (15 puntos)	B) La solución del sistema $$\frac{dx}{dt} = 10x - 5y$$ $$\frac{dy}{dt} = 8x - 12y$$ en la forma $X = C_1X_1 + C_2X_2$ es: $X = C_1\binom{5}{2}e^{8t} + C_2\binom{1}{4}e^{-10t}$ Los vectores X_1 y X_2 son: i) Linealmente independientes? Sí / No (3 puntos) ii) Múltiplos entre sí? Sí / No (2 puntos)

A)

No.	Explicación	Operatoria
1.	En primer lugar planteamos la matriz con los coeficientes obtenidos de las ecuaciones diferenciales.	$X' = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X$
2.	Obteniendo el determinante de la matriz	$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$
3.	Realizando el procedimiento para calcular el determinante se multiplica de forma cruzada los coeficientes y si restan.	$(1-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(-8) = 0$
4.	Se obtiene una ecuación cuadrática la cuál se utiliza para obtener los valores de λ	$-3 + 2\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
5.	Utilizando la ecuación de Vietta para hallar las raíces de una ecuación cuadrática es posible encontrar los valores de λ	$\lambda = -1 + 2i\ ;\ \lambda = -1 - 2i$
6.	En base a los valores obtenidos se plantea el sistema de ecuaciones para hallar los valores de las constantes K.	$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-(-1+2i) & -8 \\ 1 & -3-(-1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-2i & -8 \\ 1 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7.	Obteniendo los valores para K.	$$(2-2i)k_1 - 8k_2 = 0$$ $$k_2 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)k_1$$ $$\bar{k} = \begin{pmatrix} 1+0i \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix}$$
8.	Separando parte real e imaginaria se obtiene el valor de los vectores.	$$\overline{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \overline{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
9.	Planteando la solución general	$$x = c_1x_1 + c_2x_2$$ $$x_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$$ $$x_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$$

B) La solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = 10x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x - 12y$$

en la forma $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$ es:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}$$

Los vectores X_1 y X_2 son:

i) Linealmente independientes? Sí / No (3 puntos)

ii) Múltiplos entre sí? Sí / No (2 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	En base al criterio del Wronskiano sabemos que dos vectores son linealmente independientes si el determinante de la matriz es distinto de cero.	$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 5e^{8t} & e^{-10t} \\ 2e^{8t} & 4e^{-10t} \end{vmatrix}$
2.	Obteniendo el determinante de la matriz multiplicando de forma cruzada y restando.	$(5e^{8t})(4e^{-10t})$ $-(2e^{8t})(e^{-10^{t}}) = 18e^{-2t}$
3.	**i) Como podemos ver el Wronskiano es distinto de cero, por lo tanto ambos vectores si son linealmente independientes.**	$W(x, x_2) = 18e^{-2t} \neq 0$
4.	**ii) Como son linealmente independientes, quiere decir que no son múltiplos entre sí.**	$x_1 \neq k\chi_2$

TEMA No.5 (20 Puntos)
Obtenga una solución en serie de potencias con una serie centrada en cero $(X_0 = 0)$ para la ecuación diferencial: $$y' = xy$$

a)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Igualamos la Ecuación Diferencial a 0	$y' - xy = 0$
2.	Proponemos una solución en forma de serie de potencias	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$
3.	Sustituimos $(X_0 = 0)$	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - 0)^n$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
4.	Derivamos la serie resultante	$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$
5.	Sustituimos en la Ecuación diferencial	$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
6.	Se opera $x\,x^n = x^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$
7.	Se propone que $k = n - 1, k = n + 1$ de manera que se tenga el mismo exponente para x	$k = n - 1 \qquad k = n + 1$ $n = k + 1 \qquad n = k - 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k + 1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$
8.	Se valúa $k = 0$ en el primer sumando para que ambas series inicien desde $k = 1$	$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}(k + 1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0$

9.	Se factoriza $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$	$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+1}(k+1) - c_{k-1}]x^k = 0$$
10.	Decimos que $c_1 = 0$ para poder encontrar la sucesión	$$c_1 + c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} = 0$$ $$c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} = 0$$ $$c_{k+1} = \frac{c_{k-1}}{k+1}$$
11.	Le damos valores a $k\ iniciando\ desde$ 1 para encontrar la serie a partir de la sucesión	$$c_{k+1} = \frac{c_{k-1}}{k+1}$$ $$k = 1 \qquad c_2 = \frac{c_0}{2}$$ $$k = 2 \qquad c_3 = \frac{c_1}{3} \qquad c_1 = 0 \qquad c_3 = 0$$ $$k = 3 \qquad c_4 = \frac{c_2}{4} \qquad c_2 = \frac{c_0}{2} \quad c_4 = \frac{c_0}{8}$$ $$k = 4 \qquad c_5 = \frac{c_3}{5} \qquad c_3 = 0 \qquad c_5 = 0$$ $$k = 5 \qquad c_6 = \frac{c_4}{6} \qquad c_4 = \frac{c_0}{8} \quad c_6 = \frac{c_0}{48}$$ $$k = 6 \qquad c_7 = \frac{c_5}{7} \qquad c_5 = 0 \qquad c_7 = 0$$ $$k = 7 \qquad c_8 = \frac{c_6}{8} \qquad c_6 = \frac{c_0}{48} \quad c_8 = \frac{c_0}{384}$$

12.	Por lo tanto la serie queda de	$$y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8$$ $$c_1 = 0$$ $$c_2 = \frac{c_0}{2}$$ $$c_3 = 0$$ $$c_4 = \frac{c_0}{8}$$ $$c_5 = 0$$ $$c_6 = \frac{c_0}{48}$$ $$c_7 = 0$$ $$c_8 = \frac{c_0}{384}$$ Sustituyendo $\sum_{n=1}^{\infty} = c_0 + 0x + \frac{c_0}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{c_0}{8}x^4 + 0x^5 + \frac{c_0}{48}x^6 + 0\,x^7 + \frac{c_0}{384}x^8 + \ldots.$
13.	Se Factoriza c_0	$$c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{384}x^8 + \cdots\right]$$ $$c_0[1 + \frac{1}{2^{(1)}\,(1)!}x^{2(1)} + \frac{1}{2^{(2)}\,(2)!}x^{2(2)} + \frac{1}{2^{(3)}\,(3)!}x^{2(3)} + \frac{1}{2^{(4)}\,(4)!}x^{2(4)} + \cdots]$$
14.	Por lo tanto, la función queda	$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^{2n}}{2^n\, n!}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^{2n}}{2^n\, n!}$$