UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-122-1-V-2-00-2019

CURSO:	**Matemática Aplicada 4**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**122**
TIPO DE EXAMEN:	**Primer examen parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**09 de octubre de 2019**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Javier Estuardo Navarro**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Javier Estuardo Navarro**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MATEMATICA APLICADA 4 (M 10)
Lic. Carlos Augusto Morales Santacruz
Aux. Javier Navarro

TEMARIO "LUVSAR"

Tema 1 (30/100) derivación numérica

Utilice los datos de la Tabla 1 para aproximar:

a) La primera derivada en $x = 16$ aplicando la fórmula progresiva de 5 puntos
b) La primera derivada en $x = 17.6$ aplicando la fórmula regresiva de 5 puntos
c) La primera derivada en $x = 16.8$ aplicando la fórmula centrada de 5 puntos
d) La segunda derivada en $x = 16.8$

TABLA 1

$\boldsymbol{x}$	16	16.4	16.8	17.2	17.6
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	24	25.449695	26.898781	27.347296	29.795249

Tema 2 (20/100) integración numérica

Escribir la tabla del método de Romberg para R_{55} para aproximar:

$$\int_0^3 \sqrt{x + \sqrt{x+1}}\, dx$$

Tema 3 (30/100) integración numérica

Utilice el método de la Cuadratura Gaussiana con $N = 5$, para aproximar la integral definida en el tema 2.

Tema 4 (20/100) RK4

Utilice el método de Runge Kutta de cuarto orden para aproximar la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \qquad 1 \le x \le 2 \qquad y(1) = 1 \qquad N = 10$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (30/100) derivación numérica

Utilice los datos de la Tabla 1 para aproximar:

a) La primera derivada en $x_0 = 16$ aplicando la fórmula progresiva de 5 puntos.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se procede a definir la formula a utilizar que cumpla con lo solicitado, que sea progresiva y de 5 puntos, tenemos:</td><td>$$f'(x_0) = -\frac{1}{12h}f(x_0) + \frac{4}{h}f(x_1) - \frac{3}{h}f(x_2) + \frac{4}{3h}f(x_3) - \frac{1}{4h}f(x_4)$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Definiendo la correcta asignación de nodos:</td><td>

$\boldsymbol{i}$	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{x_i}$	16	16.4	16.8	17.2	17.6
$\boldsymbol{f(x_i)}$	24	25.449695	26.898781	27.347296	29.795249

</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se procede a calcular h, que es la separación entre cada nodo x_i</td><td>$$h = |x_{i+1} - x_i| = 0.4 \qquad \forall i = 0,1,2,3,4$$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Evaluando la formula</td><td>$$f'(16) = -\frac{1}{12(0.4)}f(16) + \frac{4}{(0.4)}f(16.4) - \frac{3}{(0.4)}f(16.8) + \frac{4}{3(0.4)}f(17.2) - \frac{1}{4(0.4)}f(17.6)$$
$$f'(16) = 0.291715$$</td></tr>
</table>

R./ $f'(16) = 0.291715$

b) La primera derivada en $x = 17.6$ aplicando la fórmula regresiva de 5 puntos

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se procede a definir la formula a utilizar que cumpla con lo solicitado, que sea regresiva y de 5 puntos, si partimos de la formula progresiva utilizada en el inciso a) tenemos:</td><td>$$f'(x_0) = -\frac{1}{12h}f(x_0) + \frac{4}{h}f(x_1) - \frac{3}{h}f(x_2) + \frac{4}{3h}f(x_3) - \frac{1}{4h}f(x_4)$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2.</td><td>Hacemos la siguiente sustitucion:</td><td>$h = -h$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Lo que implica directamente lo siguiente:</td><td>$x_i = x_{-i}$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Al realizar la sustitución en 1.</td><td>$f'(x_0) = \frac{1}{12h} f(x_0) - \frac{4}{h} f(x_{-1}) + \frac{3}{h} f(x_{-2}) - \frac{4}{3h} f(x_{-3}) + \frac{1}{4h} f(x_{-4})$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Definiendo la correcta asignación de nodos:</td><td>
<table>
<tr><td>i</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{x_i}$</td><td>16</td><td>16.4</td><td>16.8</td><td>17.2</td><td>17.6</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{f(x_i)}$</td><td>24</td><td>25.449695</td><td>26.898781</td><td>27.347296</td><td>29.795249</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Se procede a calcular h, que es la separación entre cada nodo x_i</td><td>$h = |x_{i-4} - x_{i-3}| = 0.4 \qquad \forall i = 0,1,2,3$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Evaluando la formula</td><td>$f'(17.6) = \frac{1}{12(0.4)} f(17.6) - \frac{4}{(0.4)} f(17.2) + \frac{3}{(0.4)} f(16.8) - \frac{4}{3(0.4)} f(16.4) + \frac{1}{4(0.4)} f(16)$

$f'(17.6) = 13.619169$</td></tr>
</table>

R./ $f'(17.6) = 13.619169$

c) La primera derivada en $x = 16.8$ aplicando la fórmula centrada de 5 puntos

<table>
<tr><td>No.</td><td>Explicación</td><td>Operatoria</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se procede a definir la formula a utilizar que cumpla con lo solicitado, que sea centrada y de 5 puntos, tenemos:</td><td>$f'(x_0) = \frac{1}{12h} f(x_{-2}) - \frac{2}{3h} f(x_{-1}) + \frac{2}{3h} f(x_1) - \frac{1}{12h} f(x_2)$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Definiendo la correcta asignación de nodos:</td><td>
<table>
<tr><td>i</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{x_i}$</td><td>16</td><td>16.4</td><td>16.8</td><td>17.2</td><td>17.6</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{f(x_i)}$</td><td>24</td><td>25.449695</td><td>26.898781</td><td>27.347296</td><td>29.795249</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se procede a calcular h, que es la separación entre cada nodo x_i</td><td>$h = |x_{i+1} - x_i| = 0.4$</td></tr>
</table>

4.	Evaluando la formula	$f'(16.8) = \frac{1}{12h}f(16) - \frac{2}{3h}f(16.4) + \frac{2}{3h}f(17.2) - \frac{1}{12h}f(17.6)$ $f'(16.8) = \frac{1}{12(0.4)}f(16) - \frac{2}{3(0.4)}f(16.4) + \frac{2}{3(0.4)}f(17.2) - \frac{1}{12(0.4)}f(17.6)$ $f'(16.8) = 1.955325$

R./ $f'(16.8) = 1.955325$

d) La segunda derivada en $x = 16.8$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a definir la formula a utilizar que cumpla con lo solicitado, que sea progresiva y de 5 puntos, tenemos:	$f''(x_0) = -\frac{1}{12h^2}f(x_{-2}) + \frac{4}{3h^2}f(x_{-1}) - \frac{5}{2h^2}f(x_0) + \frac{4}{3h^2}f(x_1) - \frac{1}{12h^2}f(x_2)$
2.	Definiendo la correcta asignación de nodos:	<table><tr><td>$\boldsymbol{i}$</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{x_i}$</td><td>16</td><td>16.4</td><td>16.8</td><td>17.2</td><td>17.6</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{f(x_i)}$</td><td>24</td><td>25.449695</td><td>26.898781</td><td>27.347296</td><td>29.795249</td></tr></table>
3.	Se procede a calcular h, que es la separación entre cada nodo x_i	$h = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert = 0.4$
4.	Evaluando la formula	$f''(16.8) = -\frac{1}{12(0.4)^2}f(x_{-2}) + \frac{4}{3(0.4)^2}f(x_{-1}) - \frac{5}{2(0.4)^2}f(x_0) + \frac{4}{3(0.4)^2}f(x_1) - \frac{1}{12(0.4)^2}f(x_2)$ $f''(16.8) = -70.836887$

R./ $f''(16.8) = -70.836887$

Tema 2 (20/100) integración numérica

Escribir la tabla del método de Romberg para R_{55} para aproximar:

$$\int_0^3 \sqrt{x+\sqrt{x+1}}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se procede a determinar los parámetros a utilizar:	$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+1}}$ $N=5$ $A=0, B=3$
2.	Utilizando el algoritmo 4.2 ofrecido en la pagina oficial del libro de texto, es necesaria la siguiente sintaxis:	**(x+(x+1)^0.5)^0.5**
3.	Obteniendo tabla:	(ver tabla siguiente)

R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}	R_{55}
4.85410197				
5.06002693	5.12866859			
5.11968782	5.13957478	5.14030186		
5.13566158	5.14098616	5.14108026	5.14109261	
5.13975560	5.14112028	5.14112922	5.14113000	5.14113015

R./ $R_{55}=5.14113015$

Tema 3 (30/100) integración numérica

Utilice el método de la Cuadratura Gaussiana con $N = 5$, para aproximar la integral definida en el tema 2.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Como primer paso es necesario determinar el polinomio de Legendre para $n = 5$, lo cual es equivalente a resolver la siguiente ecuación diferencial:	$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$
2.	Sin embargo, este trabajo ya fue realizado por un matemático francés, Olinde Rodrigues	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} * \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$
3.	Para $n = 5$ tenemos:	$P_5(x) = \frac{1}{2^5 * 5!} * \frac{d^5}{dx^5}[(1-x^2)^5]$ $P_5(x) = \frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$
4.	El siguiente paso es determinar las raíces del polinomio anterior. $P_5(x) = 0$	$x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}}$ $x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}}$ $x_3 = 0$ $x_4 = \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}}$ $x_5 = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}}$

<table>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Luego resta determinar los coeficientes de la cuadratura Gaussiana dados por:
$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$</td>
<td>

$$w_1 = (322 - 13\sqrt{70})/900$$

$$w_2 = (322 + 13\sqrt{70})/900$$

$$x_3 = 128/225$$

$$w_4 = (322 + 13\sqrt{70})/900$$

$$w_5 = (322 - 13\sqrt{70})/900$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Procedemos a realizar el cambio de intervalo:</td>
<td>

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}\right)dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{x+\sqrt{x+1}}dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)+1dt}}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Por ultimo se procede a realizar la aproximación de la integral:</td>
<td>

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}\right)+1dt}} \approx \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{5} w_i * \sqrt{\left(\frac{3}{2}x_i+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{3}{2}x_i+\frac{3}{2}\right)+1}}$$

<table>
<tr><th>x_i</th><th>$\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}x_i+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{3}{2}x_i+\frac{3}{2}\right)+1}}$</th></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$</td><td>$3.29446315$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$</td><td>$3.04703629$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2.63297595</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$</td><td>$2.11769978$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$</td><td>$1.64916795$</td></tr>
</table>

</td>
</tr>
</table>

		$\int_0^3 \sqrt{x+\sqrt{x+1}}dx \approx \left(\frac{322-13\sqrt{70}}{900}\right)(3.29446315) + \left(\frac{322+13\sqrt{70}}{900}\right)(3.04703629) + \frac{128}{225}(2.63297595) + \left(\frac{322+13\sqrt{70}}{900}\right)(2.11769978) + \left(\frac{322-13\sqrt{70}}{900}\right)(1.64916795)$ $\int_0^3 \sqrt{x+\sqrt{x+1}}dx \approx 5.14114063$

R./ $\int_0^3 \sqrt{x+\sqrt{x+1}}dx \approx 5.14114063$

Tema 4 (20/100) RK4

Utilice el método de Runge Kutta de cuarto orden para aproximar la solución del problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = cos(x+y) \qquad 1 \le x \le 2 \qquad y(1) = 1 \qquad N = 10$$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se procede a determinar los parámetros a utilizar:</td><td>$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$f(x,y) = cos(x+y)$$
$$A = 1, B = 2$$
$$N = 10$$
$$h = \frac{B-A}{N} = \frac{2-1}{10} = 0.1$$
$$Condition\ Alpha = y(1) = 1$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Utilizando el algoritmo 5.2 ofrecido en la página oficial del libro de texto, es necesaria la siguiente sintaxis:</td><td>**cos(t+y)**</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Obteniendo tabla:</td><td>

I	T	W
0	1.0	1.00000000
1	1.1	0.95583175
2	1.2	0.90693567
3	1.3	0.85382893
4	1.4	0.79696563
5	1.5	0.73674407
6	1.6	0.67351364
7	1.7	0.60758103
8	1.8	0.53921580
9	1.9	0.46865526
10	2.0	0.39610874

</td></tr>
</table>