Clave-101-2-V-2-00-2019_sP_14

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**Matemática Básica 1**
TIPO DE EXAMEN	**Segundo Examen Parcial**
AUXILIAR	**Juan Carlos Figueroa Schwartz**
FECHA DE EXAMEN:	**09 de octubre de 2,019**
SEMESTRE	**Segundo Semestre**
HORARIO DE EXAMEN	**14:50-16:30**
REVISADO POR:	**Ing. Cesar Ovalle**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**
DIGITALIZADO POR	**Juan Carlos Figueroa Schwartz**

SEGUNDO EXMANEN PARCIAL
TEMARIO LTE

Tema 1 (20 puntos)
Dado el polinomio: $f(x) = 6x^6 - 23x^5 + 24x^4 + 13x^3 - 10x^2$ Determinar:

a) La tabla de las posibles raíces.
b) El conjunto de las posibles raíces.
c) Las raíces del polinomio.
d) El polinomio en forma factorizado.

Tema 2 (20 puntos)
Determine la ecuación general de la línea recta que pasa por el centro de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 + 12x - 20y + 16 = 0$ y es perpendicular a la recta $2y - x - 11 = 0$.

Tema 3 (20 puntos)
Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, $g(x) = -1 - x^2$, $h(x) = 2x + 5$, encontrar:

a) El dominio y el rango de $f(x)$
b) $(g\ o\ f)(x)$
c) $h(2) + g(1)$
d) Grafique $y = -f(2x)$

Tema 4 (20 puntos)
La sección transversal de una barra de acero tiene una forma de un hexágono regular de lado 1.2 centímetros. Encuentre el peso de una barra de 4 metros de longitud, si se sabe que la barra pesa 7.8 gramos por centímetro cubico.

Tema 5 (20 puntos)
Sea $f(x)$ es el polinomio con coeficiente enteros que tiene como raíces : $x = 4$ de multiplicidad 2, $x = -2$, $x = 2$, $x = -2i + 1$ y $f(0) = -4$. Determine: a) El coeficiente principal, b) La grafica del polinomio $f(x)$.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (20 puntos)

$$f(x) = 6x^6 - 23x^5 + 24x^4 + 13x^3 - 10x^2$$

1.	El polinomio es de grado 6. El polinomio puede ser factorizado para obtener dos factores de la expresión polinómica.	$x^2(6x^4 - 23x^3 + 24x^2 + 13x - 10)$
2.	Se iguala a cero el primer factor. Se obtiene la primera raíz del polinomio de multiplicidad 2.	$x^2 = 0$ $x = 0$
3.	**a.)** Para obtener la tabla de las posibles raíces se utiliza el método de Variación de signo en el segundo factor.	$6x^4 - 23x^3 + 24x^2 + 13x - 10$
4.	Contando la variación de signos, se determina la cantidad de posibles raíces positivas.	$3\ o\ 1\ raiz\ positiva$
5.	Para determinar la cantidad de raíces negativas se evalúa la expresión polinómica en " $-x$"	$f(-x) = 6x^4 + 23x^3 + 24x^2 - 13x - 10$
6.	Se realiza nuevamente el conteo de variación de signos para determinar la posible cantidad de raíces negativas.	$1\ raiz\ negativa$

7.	Se construye la tabla de posibles raíces del polinomio. La suma de las raíces debe ser equivalente al grado del polinomio, por lo que se incluyen las raíces de valor cero (nulas) y la diferencia se complementa con las posibles raíces imaginarias

Posibles raices del polinomio		
Reales positivas	3	1
Reales negativas	1	1
Imaginarias	0	2
Nulas	2	2
Total	6	6

8.	**b.)** Se iguala el segundo factor del polinomio a cero para determinar sus raíces.	$6x^4 - 23x^3 + 24x^2 + 13x - 10 = 0$
9.	Por medio de prueba de igualación a cero de la expresión se determina que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Por lo que $x = \frac{1}{2}$ es un cero del polinomio	$6\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 23\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 13\left(\frac{1}{2}\right) - 10 = 0$ $x = \frac{1}{2}$

10.	Se utiliza el método de División Sintética para determinar el factor producto correspondiente a la raíz encontrada anteriormente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 6 & -23 & 24 & 13 & -10 \\ & & 3 & -10 & 7 & 10 \\ \hline & 6 & -20 & 14 & 20 & 0 \end{array}$$

11.	Se obtiene el factor producto del polinomio con la raíz.	$\left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^3 - 20x^2 + 14x + 20)$
12.	Se realiza de nuevo una prueba de igualación a cero de la expresión. Se determina que $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$. Por lo que $x = -\frac{2}{3}$ es un cero del polinomio	$6\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 20\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 14\left(-\frac{2}{3}\right) + 20 = 0$ $x = -\frac{2}{3}$

13.	Se utiliza nuevamente el método de División Sintética para determinar el factor producto correspondiente a la raíz encontrada anteriormente.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{2}{3} & 6 & -20 & 14 & 20 \\ & & -4 & 16 & -20 \\ \hline & 6 & -24 & 30 & 0 \end{array}$$

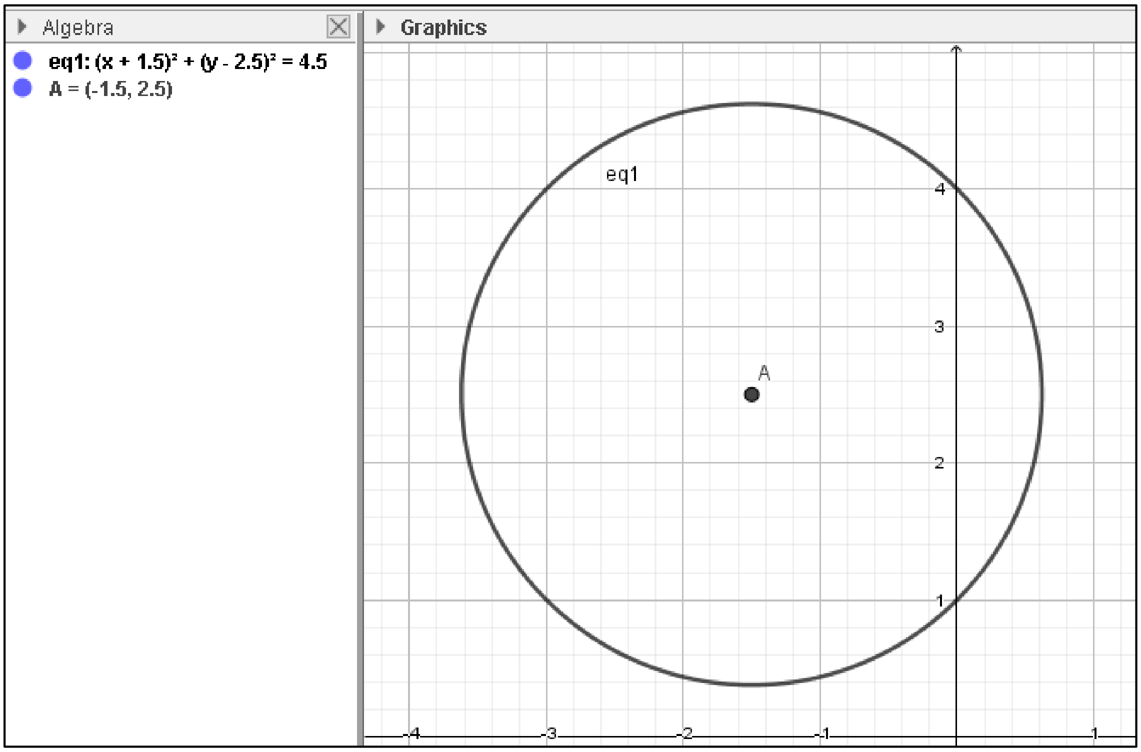
14.	Se obtiene el factor producto del polinomio con la raíz.	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)(6x^2-24x+30)$
15.	Se aplica la Formula cuadrática en el último factor del producto para determinar sus raíces.	$6x^2-24x+30=0$ $x=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4(6)(30)}}{2(6)}$
16.	Las raíces encontradas son imaginarias.	$x=2\pm i$
17.	**c.)** Se obtienen las raíces del polinomio.	$x=\frac{1}{2}$ $x=-\frac{2}{3}$ $x=2\pm i$ $x=0$
18.	**d.)** Se obtiene el polinomio de forma factorizada mediante el producto de todas las raíces.	$x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2+i)(x-2-i)$
	RESPUESTA	$x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2+i)(x-2-i)$

Tema 2 (20 puntos)

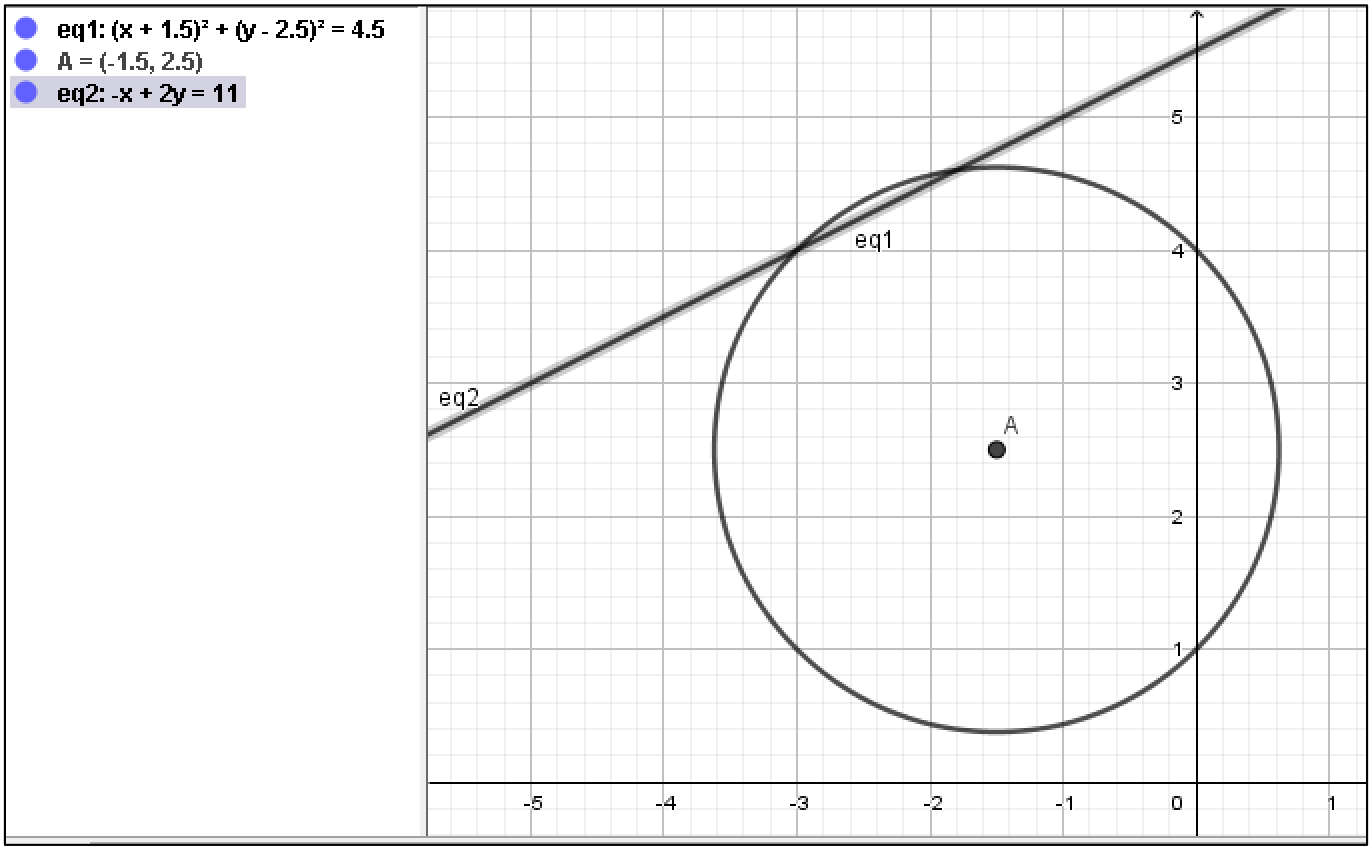
$$Ecuacion\ de\ la\ circunferencia: 4x^2 + 4y^2 + 12x - 20y + 16 = 0$$

$$Ecuacion\ de\ la\ recta: 2y - x - 11 = 0$$

<table>
<tr><td>1.</td><td>Para determinar el centro de la circunferencia en el plano cartesiano se debe llevar la ecuación de la circunferencia a su forma estándar.</td><td>$4x^2 + 4y^2 + 12x - 20y + 16 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">Se agrupan los términos en su respectiva variable y el termino constante se lleva al otro lado de la igualdad.</td><td>$(4x^2 + 12x) + (4y^2 - 20y) = -16$</td></tr>
<tr><td>$4(x^2 + 3x) + 4(y^2 - 5y) = -16$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">Se completa al cuadrado las expresiones en los paréntesis.</td><td>$4(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) + 4(y^2 - 5y + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}) = -16$</td></tr>
<tr><td>$4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 9 + 4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - 25 = -16$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Se obtiene la forma estándar de la ecuación de la circunferencia.</td><td>$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Se encuentra el centro de la circunferencia.</td><td>$C\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$</td></tr>
</table>



6.	Se requiere la pendiente de la recta perpendicular. Se lleva la ecuación de la recta a su forma estándar.	$2y - x - 11 = 0$
7.	Se despeja la variable y.	$2y = x + 11$
		$y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$
8.	Se determina la pendiente "m" y el punto de intersección "b" en el eje y	$m_1 = \frac{1}{2}$
		$b = \frac{11}{2}$ $y(0) = \frac{11}{2}$



9.	La pendiente de la recta que se busca debe ser inversamente proporcional y con signo opuesto a la pendiente la recta perpendicular a esta	$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ $m_2 = -2$
10.	Con el valor de la pendiente de la recta que se busca, se determina un punto en el plano carteciano por donde cruza la recta para determinar la ecuación de la recta. Este punto seria el centro del círculo.	$P(x_0, y_0)$ $P(-1.5, 2.5)$
11.	Se establece la ecuación punto pendiente de la recta para determinar su ecuación general.	$y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - (-2.5) = (-2)(x - 2.5)$

		$y = -2x - \frac{1}{2}$
	RESPUESTA	$\mathbf{2x + y + \frac{1}{2} = 0}$

Tema 3 (20 puntos)

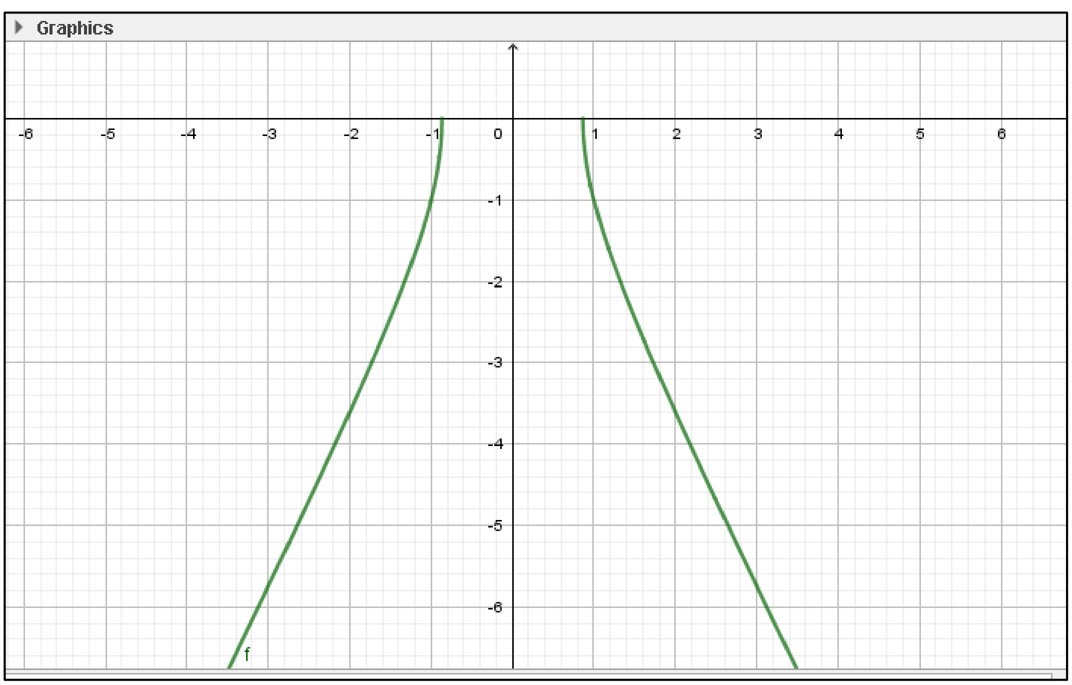
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

$g(x) = -1 - x^2$

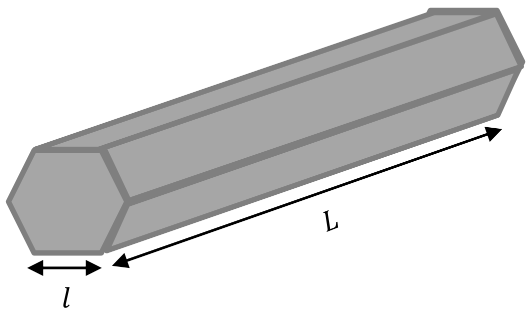
$h(x) = 2x + 5$

1.	**a.)** El dominio de $f(x)$ se determina mediante igualando el termino dentro de la raíz mayor de cero. Ya que el valor de la variable x no puede llevar al terminó a un expresión negativa.	$x^2 - 3 \geq 0$ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \geq 0$
2.	Por medio de la resolución de la desigualdad se determina que los intervalos que representan el dominio de la función son:	$(\infty$,-$\sqrt{3}]\ U\ [\sqrt{3}, \infty)$ $D = \{x \vert x \leq -\sqrt{3}\ y\ x \geq \sqrt{3}$
3.	El rango de la función se encuentra analizando los posibles valores que puede tomar la función. Como el resultado de una raíz cuadrada no puede ser un numero negativo se determina que el rango son todos los números reales mayores a 0.	$R = [0, \infty)$

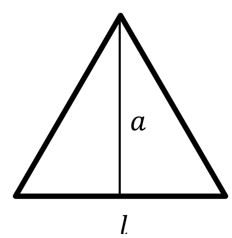
4.	**b.)** La función compuesta de $(g\ o\ f)(x)$ se establece como:	$g(f(x)) = -1 - (f(x))^2$ $g(f(x)) = -1 - (\sqrt{x^2 - 3})^2$ $(g\ o\ f)(x) = 2 - x^2$
5.	**c.)** Se evalúan las respectivas funciones $h(2) + g(1)$	$h(x_1) + g(x_2) = (2x_1 + 5) + (-1 - {x_2}^2)$ $h(2) + g(1) = (2(2) + 5) + (-1 - (1)^2)$ $h(2) + g(1) = 7$
6.	**d.)** La grafica para la función $f(x)$ que se requiere presente una serie de transformaciones.	$f(x) \longrightarrow -f(2x)$
7.	La primera transformación de la ecuación representa una reflexión en el eje x.	$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ $-f(x) = -\sqrt{x^2 - 3}$
8.	La segunda transformación de la ecuación es una reducción horizontal.	$-f(2x) = -\sqrt{(2x)^2 - 3}$



Tema 4 (20 puntos)



$\textbf{Datos y Variables}$		
l	$Lado\ del\ hexagono\ regular$	$1.2\ cm$
L	$Longitud\ de\ barra$	$4\ m$
ρ	$Densidad\ de\ la\ barra$	$7.8\ {}^{g}/_{cm^3}$

1.	Para determinar el peso W de la barra se utiliza su densidad. La densidad dada esta en gramos por centímetro cúbico. Por lo que se requiere del volumen de la barra multiplicado por la densidad.	$W = \rho V$
2.	El volumen de la barra está dado por el área de la sección transversal del polígono multiplicado por la longitud de la barra.	$V = AL$
		$A = \frac{1}{2} nla$
3.	Se analiza la sección transversal del hexágono en uno de sus 6 triángulos compuestos. Al ser un polígono regular, el apotema "a" de este hexágono se puede relacionar con la altura de uno de los triángulos compuestos. Utilizando la ecuación de la altura del triángulo regular se puede encontrar la relación entre el apotema y la magnitud de un lado.	
		$a = \frac{\sqrt{3}}{2} l$
4.	Se remplaza el valor de la apotema en la ecuación del área del polígono.	$A = \frac{1}{2} nl \left(\frac{\sqrt{3}}{2} l \right)$
		$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ nl^2$
5.	Se remplazan los valores en la ecuación de área.	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ (6)(1.2)^2$
		$A = 3.74\ cm^2$

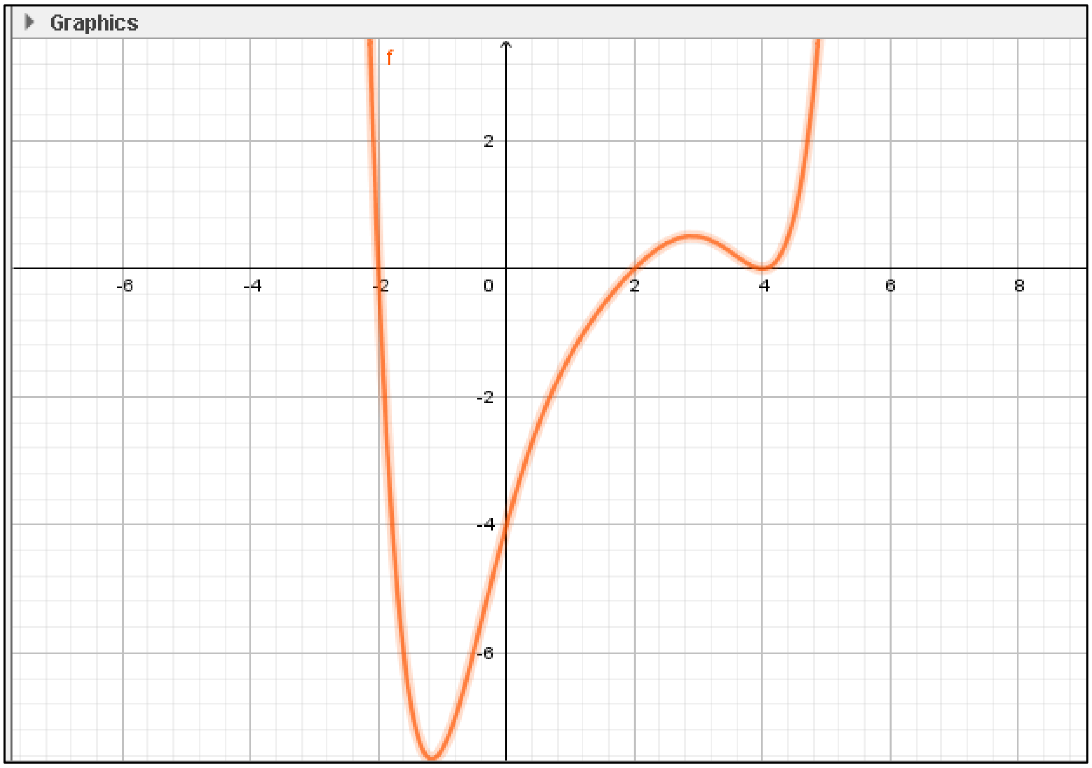
6.	Se remplazan los valores en la ecuación de volumen. Se toma la longitud de la barra de 4 metros como 400 cm.	$V = (3.74)(400)$
		$V = 1{,}496\ cm^3$
7.	Ya obtenido el volumen, se encuentra el peso de la barra.	$W = (7.8\ {}^{g}/_{cm^3})(1{,}496\ cm^3)$
	RESPUESTA	$W = 11{,}668.8\ g$

Tema 5 (20 puntos)

Raices del Polinomio	
Ceros	*multiplicidad*
$x = 4$	2
$x = -2$	1
$x = 2$	1
$x = 1 + 2i$	1
$x = 1 - 2i$	1

1.	Para determinar el coeficiente principal se debe llegar a la expresión polinómica general me mediante la multiplicación de todos los factores del polinomio. Se toma en cuenta la multiplicidad de grado 2 del factor $(x - 4)$.	$(x-4)^2(x+2)(x-2)(x+2i-1)(x-2i-1)$
2.	Se indica que $f(0) = -4$ lo que se asume que existe una constante "a" multiplica al polinomio.	$a(x-4)^2(x+2)(x-2)(x+2i-1)(x-2i-1)$
3.	Se procede a multiplicar los factores del polinomio empezando por los factores que tienen valores imaginarios.	$(x+2i-1)(x-2i-1) = x^2 - 2x + 5$

		$a(x-4)^2(x+2)(x-2)(x^2-2x+5)$
4.	Se opera la suma y producto de términos iguales.	$(x+2)(x-2) = x^2-4$
		$a(x-4)^2(x^2-4)(x^2-2x+5)$
5.	Se opera el binomio al cuadrado.	$(x-4)^2 = x^2-8x+16$
		$a(x^2-8x+16)(x^2-4)(x^2-2x+5)$
6.	Se operan los factores resultantes.	$a(x^4-8x^3+12x^2+32x-64)(x^2-2x+5)$
7.	Se obtiene la expresión polinómica en su forma general	$a(x^6-10x^5+33x^4-32x^3-68x^2+288x-320)$
8.	Se determina el valor de "a" mediante $f(0) = -4$.	$f(0) = -4.$
		$-4 = a(-320)$
		$a = \frac{1}{80}$
9.	Se obtiene la función polinómica general completa. Donde se visualiza la constante principal.	$\frac{1}{80}(x^6-10x^5+33x^4-32x^3-68x^2+288x-320)$
		$\boldsymbol{c_p = \frac{1}{80}}$


Graphics
f
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6
8