Clave-101-4-V-2-00-2019_16

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	**Matemática Básica 1**
TIPO DE EXAMEN	**Examen Final**
AUXILIAR	**Juan Carlos Figueroa Schwartz**
FECHA DE EXAMEN:	**19 de noviembre de 2,019**
SEMESTRE	**Segundo Semestre**
HORARIO DE EXAMEN	**16:00-18:00**
REVISADO POR:	**Ing. Cesar Ovalle**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**
DIGITALIZADO POR	**Juan Carlos Figueroa Schwartz**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de matemática

Matemática Básica 1
Jornada Vespertina
19 de noviembre de 2019

EXMANEN FINAL
TEMARIO Hg

Tema 1 (20 puntos)
Para la siguiente sección cónica:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

Determine las coordenadas de los vértices, focos, ecuaciones de las asíntotas (si hubiesen), y trace su gráfica.

Tema 2 (20 puntos)
Resuelva las ecuaciones siguientes, dejando constancia de sus operaciones y procedimientos.

2.1) $\frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}$

2.2) $x^{-1/3} + 2x^{-2/3} = 3$

Tema 3 (20 puntos)
Un cilindro cuyo radio es igual a un tercio de su altura se inscribe en una esfera de 3 metros de radio. Halle el volumen fuera del cilindro y dentro de la esfera.

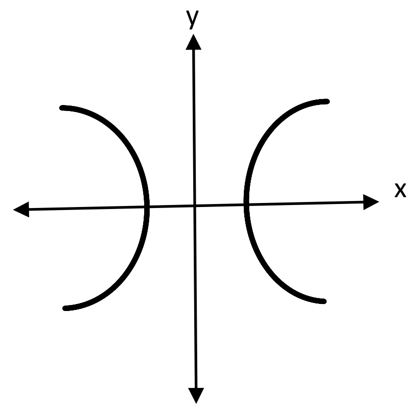
Tema 4 (20 puntos)
Se va a construir una ventana formada por un rectángulo y coronada por un triángulo equilátero. Si x es la longitud de la base del rectángulo y el perímetro de la ventana es de 480 centímetros, a) Escriba una función cuadrática que represente el área de la ventana en función de x, b) Calcule las dimensiones de la ventana de manera que su área sea máxima.

Tema 5 (20 puntos)
Una muestra inicial de 300 gramos de una sustancia radioactiva se desintegra hasta 180 gramos en 3 días. a) Determine la constante de decaimiento radioactivo; b) Escriba la función $M(t)$ que representa la masa de sustancia en función del tiempo; c) Determine la vida media de la sustancia; d) ¿En cuánto tiempo se habrá consumido 250 gramos de la sustancia?

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1 (20 puntos)

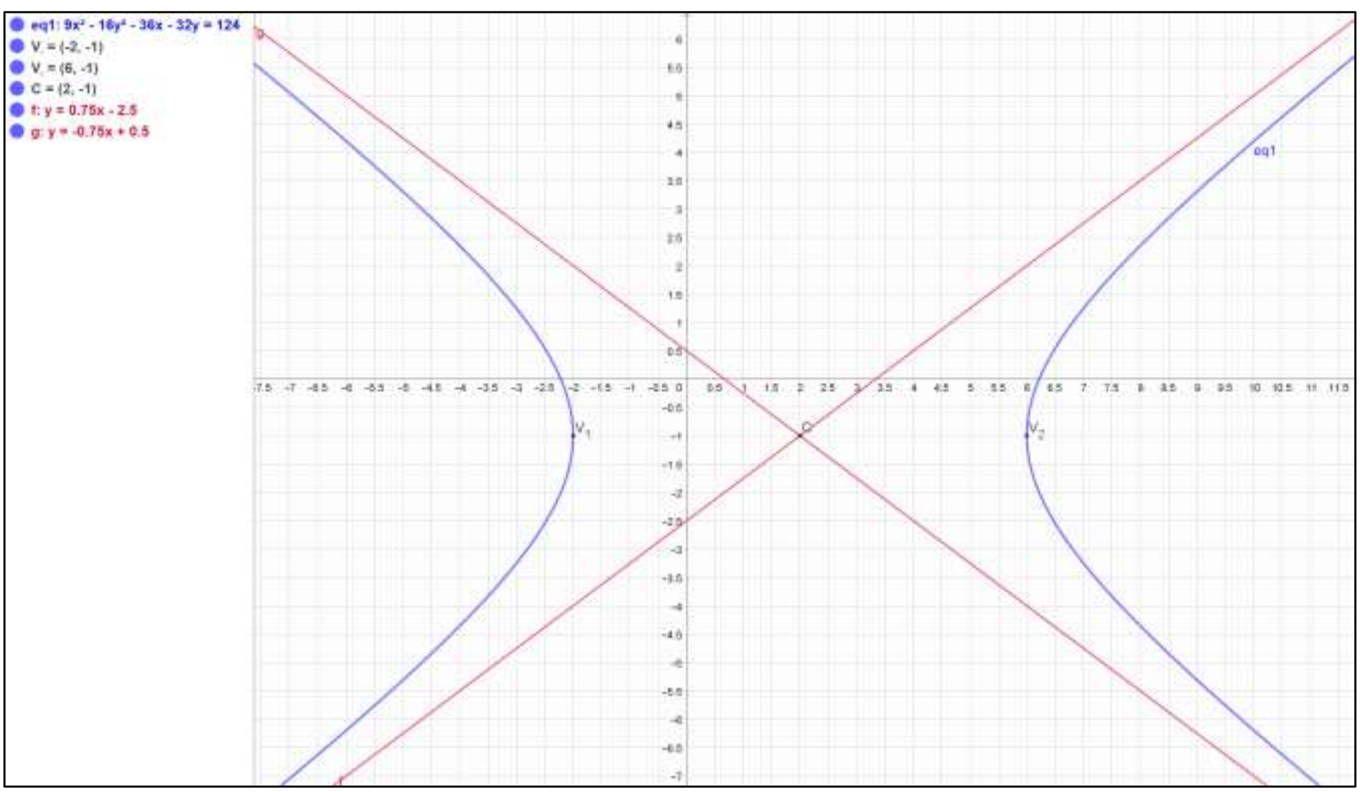
1.	La ecuación de la sección cónica se encuentra en su forma general. Se debe llevar la ecuación a su forma estándar para identificar el tipo de sección cónica.	$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$
2.	Se agrupan los términos en un orden algebraico correspondiente. Se despeja el termino constante al otro lado del paréntesis.	$9x^2 - 36x - 16y^2 - 32y - 124 = 0$
		$(9x^2 - 36x) - (16y^2 + 32y) = 124$
3.	Se factoriza las constantes de los términos principales de "x" y "y".	$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$
4.	Se completa al cuadrado las expresiones en paréntesis para obtener el cuadrado de una suma.	$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) = 124$
		$9(x^2 - 4x + 4) - 36 - 16(y^2 + 2y + 1) + 16 = 124$
		$9(x - 2)^2 - 36 - 16(y + 1)^2 + 16 = 124$
5.	Se operan los valores constantes manteniéndolos del otro lado del signo igual.	$9(x - 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$
6.	La ecuación estándar de una sección cónica debe estar igualada a 1. Por lo que divide toda la expresión dentro de 144.	$(9(x - 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 144) * \frac{1}{144}$
7.	Se obtiene la ecuación estándar.	$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$

8.	Identificando el signo negativo del segundo término de la ecuación, se establece que se trata de una hipérbola.	
9.	Siendo la expresión algebraica de “x" que tiene el signo positivo, se establece que la hipérbola se encuentra orientada hacia el eje X.	
10	El centro de la hipérbola no se encuentra en el origen. Se analiza la estructura de la ecuación estándar para determinar las coordenadas del centro y los valores de "a" y "b" para encontrar las coordenadas de los vértices y los focos.	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
		$centro = C(h,k)$
		$C(2,-1)$
		$a=4,\ b=3$
11.	Las coordenadas de los vértices de las hipérbolas se determina mediante las sumatoria y resta del valor de "a" en la coordenada x del centro.	$V_1(2+a,-1)$ $V_2(2-a,-1)$
		$V_1(6,-1)$ $V_2(-2,-1)$
12.	Las coordenadas de los focos de las hipérbolas se determina mediante el valor “c"	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{4^2+3^2}$
		$c=5$
13.	Se suma el valor “c" en las coordenadas x del centro para obtener las coordenadas de los focos.	$F_1(2+c,-1)$ $F_2(2-c,-1)$
		$F_1(7,-1)$ $F_2(-3,-1)$
14.	Para determinar las ecuaciones de las asíntotas se utiliza la ecuación de la recta. Donde la pendiente “m" es el cociente de los valores "b" y "a". Los valores iniciales de x_0 y y_0 son el centro de la hipérbola.	$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$

<table>
<tr><td rowspan="2">15.</td><td rowspan="2">Se resuelve una de las ecuaciones de las asíntotas.</td><td>$y-(-1)=\frac{3}{4}(x-2)$</td></tr>
<tr><td>$y_1=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16.</td><td rowspan="2">La otra ecuación de la asíntota se obtiene mediante el cambio de signo del valor de la pendiente.</td><td>$y-(-1)=-\frac{3}{4}(x-2)$</td></tr>
<tr><td>$y_2=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>RESPUESTAS</td><td>$V_1(6,-1)$
$V_2(-2,-1)$

$F_1(7,-1)$
$F_2(-3,-1)$

$y_1=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$
$y_2=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>



Tema 2 (20 puntos)

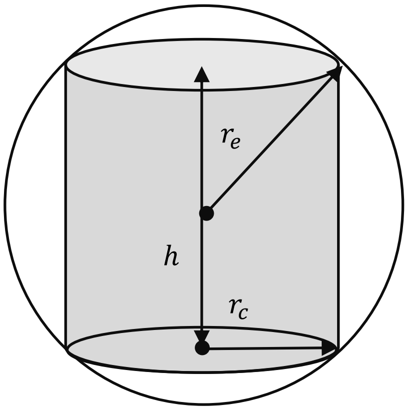
2.1) $\frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}$

1.	Primero se simplifica la ecuación removiendo el valor del termino con el denominador mediante la multiplicación de toda la expresión por $\sqrt{6x+1}$. Se simplifica la expresión.	$\sqrt{6x+1}\left(\frac{21}{\sqrt{6x+1}} - \sqrt{6x+1} = 2\sqrt{3x}\right)$
		$21 - (6x+1) = 2\sqrt{3x}\sqrt{6x+1}$
		$-3x + 10 = \sqrt{3x}\sqrt{6x+1}$
2.	Se utiliza el método de eliminación de radicales mediante elevando al cuadrado ambos lados del igual. Se simplifica la expresión.	$(-3x+10)^2 = \left(\sqrt{3x}\sqrt{6x+1}\right)^2$
		$100 - 60x + 9x^2 = (3x)(6x+1)$
		$9x^2 + 63x - 100 = 0$
3.	Mediante la fórmula cuadrática se resuelve la expresión.	$x = \frac{-(63) \pm \sqrt{(63)^2 - 4(9)(-100)}}{2(9)}$
4.	De los valores obtenidos, el valor de x_1 si es una solución de la ecuación. El valor x_2 no es una solución.	$x_1 = \frac{4}{3}$ $x_2 = -\frac{25}{3}$
	RESPUESTAS	$x = \frac{4}{3}$

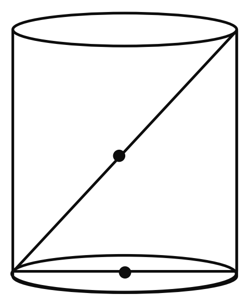
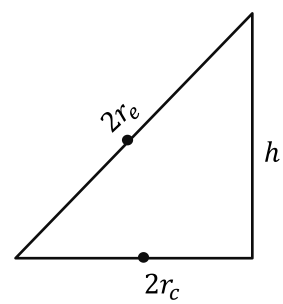
2.2) $\boldsymbol{x^{-1/3} + 2x^{-2/3} = 3}$

1.	Se utiliza el método por sustitución en la variable "x". Se toma en cuenta elevar al cuadrado para obtener la sustitución correcta en los dos términos de la ecuación.	$x^{-1/3} = u$
		$\left(x^{-1/3}\right)^2 = u^2$
		$x^{-2/3} = u^2$
2.	Se hace la sustitución en la ecuación. Se obtiene una ecuación cuadrática.	$u + 2u^2 = 3$
		$2u^2 + u - 3 = 0$
3.	Mediante la fórmula cuadrática se resuelve la expresión.	$u = \dfrac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$
		$u_1 = 1$ $u_2 = -\dfrac{3}{2}$
4.	Se igualan las soluciones con la sustitución original.	$x^{-1/3} = u$
		${x_1}^{-1/3} = 1$ ${x_2}^{-1/3} = -\dfrac{3}{2}$
5.	Se despeja los valores de "x". Ambos valores cumplen como soluciones de la ecuación.	$x_1 = 1$ $x_2 = -\dfrac{8}{27}$
	RESPUESTAS	$x_1 = 1$ $x_2 = -\dfrac{8}{27}$

Tema 3 (20 puntos)

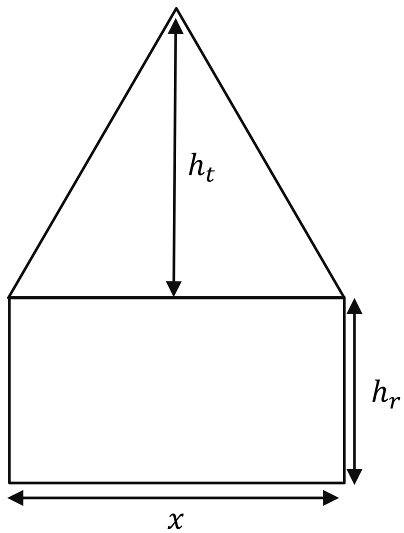


$Datos\ y\ Variables$		
r_e	$Radio\ de\ la\ esfera$	$3\ metros$
r_c	$Radio\ de\ la\ base\ del\ cilindro$	$\frac{h}{3}\ metros$
h	$Altura\ del\ cilindro$	$3r_{cil}\ metros$

1.	Se desea encontrar el volumen fuera del cilindro y dentro de la esfera. Sea la diferencia entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro	$V = V_e - V_c$
		$V = \frac{4}{3}\pi {r_e}^3 - \pi {r_c}^2 h$
2.	Se desconoce el valor del radio del cilindro y su altura. Pero se conoce su relación geométrica.	$r_c = \frac{h}{3}$
3.	Por medio del análisis geométrico de las dimensiones del cilindro inscrito en la esfera, se establece un triángulo rectángulo que relaciona el radio de la esfera circunscrita con el radio y la altura del cilindro.	 
4.	Es utiliza el teorema de Pitágoras.	$(2r_e)^2 = h^2 + (2r_c)^2$
		$4{r_e}^2 = h^2 + 4{r_c}^2$
5.	Conociendo la relación entre r_c y h, se eleva al cuadrado para sustituirla en la ecuación de Pitágoras.	${r_c}^2 = \frac{h^2}{9}$
		$4{r_e}^2 = h^2 + 4\left(\frac{h^2}{9}\right)$

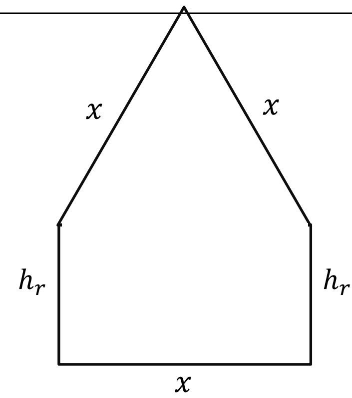
6.	Se resuelve la ecuación planteada, conociendo ya el valor de r_e.	$4(3)^2 = h^2 + 4\frac{h^2}{9}$
		$324 = 9h^2 + 4h^2$
		$\frac{324}{13} = h^2$
7.	El valor de la altura del cilindro no puede ser negativo. Por lo que se toma como resultado el valor de la positiva considerando que es aproximadamente igual a 5.	$h = \pm 4.992$
		$h \approx 5$
8.	Se encuentra el valor del radio del cilindro.	$r_c = \frac{5}{3}$
9.	Con los valores encontrados, se remplazan en la ecuación planteada originalmente para determinar el volumen en cuestión.	$V = \frac{4}{3}\pi {r_e}^3 - \pi {r_c}^2 h$
		$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 - \pi\left(\frac{5}{3}\right)^2(5)$
	RESPUESTAS	$\boldsymbol{V = 69.46\ m^3}$

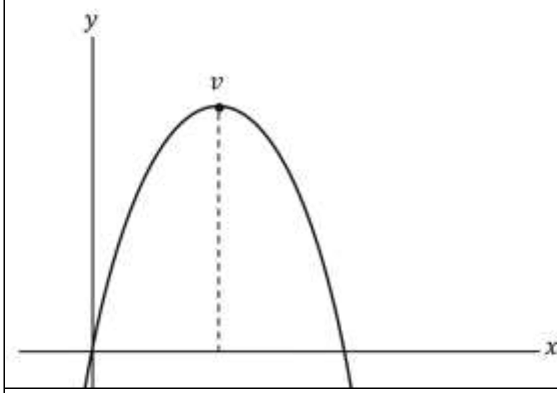
Tema 4 (20 puntos)



$\textbf{\textit{Datos y Variables}}$		
x	$Base\ del\ rectangulo$	?
h_r	$Altura\ del\ rectangulo$	?
h_t	$Altura\ del\ triangulo$	?
P	$Perimetro\ total\ de\ la\ ventana$	$480\ cm$

1.	a.) Para construir la ecuación cuadrática del área total de la ventana se requiere las ecuaciones correspondientes del área tanto del triángulo equilátero como del rectángulo.	$A = A_t + A_r$ $A_t = \frac{1}{2}bh_t$ $A_r = bh_r$
2.	Los valores de la base del triángulo equilátero y del rectángulo son iguales y se representan según el enunciado como x.	$A = \frac{1}{2}xh_t + xh_r$
3.	Al tratarse de un triángulo equilátero, se puede representar la ecuación de su área en función de su base por medio de su altura.	$h_t = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ $A_t = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$
4.	La función del área total de la ventana debe estar en función de una sola variable, la cual debe ser x. Por lo que la se debe encontrar el valor de la altura de rectángulo h_r en función de su base x.	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xh_r$

5.	Se sabe que el perímetro total de la ventana debe ser de 480 cm. Sabiendo que los tres lados del triángulo equilátero son iguales a su base, el perímetro total de la ventana está contemplado por la altura del rectángulo más su base y los dos lados superiores del triangulo	
		$P = 3x + 2h_r$
6.	Se despeja la altura del rectángulo para encontrar su relación con la base.	$2h_r = 480 - 3x$
		$h_r = \frac{480 - 3x}{2}$
7.	Se remplaza la relación de la altura del rectángulo en la ecuación del área total de la ventana	$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x\left(\frac{480 - 3x}{2}\right)$
		$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{480x - 3x^2}{2}$
8.	Con la ecuación del área en función de solo x, se lleva la expresión a su forma cuadrática general.	$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + 240x$
		$A(x) = -1.067x^2 + 240x$
9.	b.) Para encontrar las dimensiones de la ventana que hacen que su área sea la máxima, se debe analizar la gráfica de la función cuadrática. Para eso, se lleva la ecuación general del área a su forma estándar mediante la completación al cuadrado.	$A = -1.067(x^2 - 224.93x)$
		$A = -1.067(x^2 - 224.93x + 12{,}648.65 - 12{,}648.65)$
		$A(x) = -1.067(x - 112.47)^2 + 13{,}496.10$

10.	Mediante la ecuación estándar se determina que la gráfica de la función es una parábola invertida y desplazada en el x y también en el eje y. El vértice de la parábola establece que para cierto valor de x existe un valor máximo de área. Las coordenadas del vértice se encuentran mediante la ecuación estándar.	
		$V(112.47, 13496.10)$
11.	Se determina que el valor máximo del área de la ventana en función de la base del rectángulo es:	$A_{max}(112.47) = 13{,}496.10\ cm^2$
12.	La altura del rectángulo se encuentra mediante la relación con la base. Se sabe también que los lados del triángulo equilátero son iguales a la base del rectángulo.	$h_r = \frac{480 - 3(112.47)}{2}$
		$h_r = 71.30\ cm$
	RESPUESTAS	$\boldsymbol{A(x) = -1.067x^2 + 240x}$ $\boldsymbol{Para\ area\ maxima:}$ $\boldsymbol{Base\ del\ rectangulo = 112.47\ cm}$ $\boldsymbol{Altura\ del\ rectangulo = 71.30\ cm}$ $\boldsymbol{Lados\ del\ triangulo\ rectangulo = 112.47}$

Tema 5 (20 puntos)

1.	a) Para encontrar la constante de decaimiento se debe primero construir la función. La cual esta dada por el modelo de decaimiento relativo. Donde "r" es la constante de decaimiento.	$M(t) = M_0 e^{-rt}$
2.	Conociendo que se tiene una muestra inicial de 300 gramos y que se ha desintegrado hasta 180 gramos en 3 dias, se remplazan los valores en la ecuación.	$M_0 = 300\ gramos$ $M(3) = 180\ gramos$
		$180 = (300)e^{-r(3)}$
3.	Se despeja "r" para encontrar el valor de la constante de decaimiento.	$\frac{3}{5} = e^{-r(3)}$
		$ln\left(\frac{3}{5}\right) = -r(3)$
		$r = -0.17028$
4.	b) Con la constante de decaimiento se puede establecer la función que representa la masa de sustancia en función del tiempo.	$M(t) = 300e^{-0.17028t}$
5.	c) Utilizando la función, se debe encontrar el tiempo de vida media de la cantidad de sustancia inicial.	$\frac{M_0}{2} = M_0 e^{-0.17028t}$
6.	Se despeja la variable del tiempo	$\frac{1}{2} = e^{-0.17028t}$
		$ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.17028t$
		$t = 4.07\ dias$
7.	d.) Para determinar en cuanto tiempo se habrá consumido 250 gramos de la sustancia se busca el tiempo en que se consumió el residuo de ese consumo.	$(300 - 250)gramos = 50\ gramos$

8.	Se utilizan 50 gramos de sustancia para encontrar el tiempo que le tomo llegar a esa cantidad de sustancia.	$50 = 300e^{-0.17028t}$
9.	Se despeja la variable tiempo	$\frac{1}{6} = e^{-0.17028t}$
		$ln\left(\frac{1}{6}\right) = -0.17028t$
		$t = 10.52\ dias$
	RESPUESTAS	$\boldsymbol{r = -0.17028}$ $\boldsymbol{M(t) = 300e^{-0.17028t}}$ $\boldsymbol{t = 4.07\ dias\ (vida\ media)}$ $\boldsymbol{t = 10.52\ dias\ (50\ gramos)}$