UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MATEMATICA INTERMEDIA 3

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
SECCION "N"

TEMA 1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS
Resuelva las ecuaciones diferenciales de orden superior.

a) $y'' + 3y' - 4y = 0$

b) $y'' + 2y' + y = 0$

c) $y'' + 4y' + 20y = 0$

d) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

TEMA 2. METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS
Resuelva por el método de coeficientes indeterminados las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$

b) $4y'' + 4y' + y = 3xe^x$

c) $y'' + y = 4x + 10\sin x$

TEMA 3. METODO DEL ANULADOR

$$y'' + y = x\cos x - \cos x$$

RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

TEMA 1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS

Resuelva las ecuaciones diferenciales de orden superior.

a) $y'' + 3y' - 4y = 0$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$
$$(m+4)(m-1) = 0$$
$$m_1 + 4 = 0 \qquad m_2 - 1 = 0$$
$$m_1 = -4 \qquad m_2 = 1$$

Solución general:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}}$$

---

b) $y'' + 2y' + y = 0$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$
$$(m+1)^2 = 0$$
$$m_1 + 1 = 0 \qquad m_2 + 1 = 0$$
$$m_1 = -1 \qquad m_2 = -1$$

Se tienen raíces con multiplicidad 2

Por lo tanto, la solución general:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}}$$

---

c) $y'' + 4y' + 20y = 0$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 4m + 20 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(20)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{-64}}{2} = -2 \pm \frac{8}{2} i$$

$$m_{1,2} = -2 \pm 4i$$

$$m_1 = -2 + 4i \qquad m_2 = -2 - 4i$$

Se tienen raíces complejas conjugadas con los siguientes parámetros:

$$\alpha = -2 \qquad \beta = 4$$

Por lo tanto, la solución general:

$$y = C_1 e^{\alpha} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha} \sin(\beta x)$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-2} \cos(4x) + C_2 e^{-2} \sin(4x)}$$

---

d) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Ecuación auxiliar:

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$$
$$(m+1)^3 = 0$$
$$m_1 + 1 = 0 \quad m_2 + 1 = 0 \quad m_3 + 1 = 0$$
$$m_1 = -1 \quad m_2 = -1 \quad m_3 = -1$$

Se tienen raíces con multiplicidad 3

Por lo tanto, la solución general:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} + C_3 x^2 e^{m_1 x}$$

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}}$$

TEMA 2. METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Resuelva por el método de coeficientes indeterminados las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$

Ecuación homogénea relacionada:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m+2)^2 = 0$$
$$m_1 + 2 = 0 \qquad m_2 + 2 = 0$$
$$m_1 = -2 \qquad m_2 = -2$$

Se tienen raíces con multiplicidad 2

Por lo tanto, la solución complementaria:

$$y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

$$\boldsymbol{y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$$

Método de coeficientes indeterminados:

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$
$$Dado: 4x^2 + 6e^x \quad suponemos \quad y_p = Ax^2 + Bx + C + Fe^x$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Fe^x$$
$$y'_p = 2Ax + B + Fe^x$$
$$y''_p = 2A + Fe^x$$

Sustituir:

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$
$$2A + Fe^x + 4(2Ax + B + Fe^x) + 4(Ax^2 + Bx + C + Fe^x) = 4x^2 + 6e^x$$
$$2A + Fe^x + 8Ax + 4B + 4Fe^x + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4Fe^x = 4x^2 + 6e^x$$
$$4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C) + 9Fe^x = 4x^2 + 6e^x$$

Determinar coeficientes:

$$4A = 4 \quad 8A + 4B = 0 \quad 2A + 4B + 4C = 0 \quad 9F = 6$$
$$A = 1 \quad B = -\frac{8A}{4} \quad C = \frac{-2A - 4B}{4} \quad F = \frac{2}{3}$$
$$A = 1 \quad B = -2(1) = -2 \quad C = \frac{-2(1) - 4(-2)}{4} = \frac{3}{2} \quad F = \frac{2}{3}$$
$$\boldsymbol{A = 1 \quad B = -2 \quad C = \frac{3}{2} \quad F = \frac{2}{3}}$$

Por lo tanto, la solución particular:

$$\boldsymbol{y_p = x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x}$$

La solución general:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x}$$

---

b) $4y'' + 4y' + y = 3xe^x$

Ecuación homogénea relacionada:

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$
$$(m + 1/2)^2 = 0$$
$$m_1 + 1/2 = 0 \qquad m_2 + 1/2 = 0$$
$$m_1 = -1/2 \qquad m_2 = -1/2$$

Por lo tanto, la solución complementaria:

$$y_c = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

$$\boldsymbol{y_c = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2}}$$

Se tienen raíces con multiplicidad 2

Método de coeficientes indeterminados:

$$4y'' + 4y' + y = 3xe^x$$
$$Dado: 3xe^x \quad suponemos \quad y_p = (Ax + B)e^x$$

$$y_p = (Ax + B)e^x$$
$$y'_p = (Ax + B)e^x + Ae^x$$
$$y''_p = (Ax + B)e^x + Ae^x + Ae^x$$
$$y''_p = (Ax + B)e^x + 2Ae^x$$

Sustituir:

$$4y'' + 4y' + y = 3xe^x$$
$$4\big((Ax + B)e^x + 2Ae^x\big) + 4\big((Ax + B)e^x + Ae^x\big) + (Ax + B)e^x = 3xe^x$$
$$4Axe^x + 4Be^x + 8Ae^x + 4Axe^x + 4Be^x + 4Ae^x + Axe^x + Be^x = 3xe^x$$
$$(4A + 4A + A)xe^x + (4B + 4B + B + 8A + 4A)e^x = 3xe^x$$
$$(9A)xe^x + (9B + 12A)e^x = 3xe^x$$

Determinar coeficientes:

$$9A = 3 \quad 9B + 12A = 0$$
$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{12}{9}A$$
$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{12}{9} \cdot \frac{1}{3}$$
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{4}{9}}$$

Por lo tanto, la solución particular:

$$\boldsymbol{y_p = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^x}$$

La solución general:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 e^{-x/2} + C_2 x e^{-x/2} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^x}$$

---

c) $y'' + y = 4x + 10\sin x$

Ecuación homogénea relacionada:

$$y'' + y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 1 = 0$$
$$m^2 = -1$$
$$m = \sqrt{-1}$$
$$m_1 = i \qquad m_2 = -i$$

Se tienen raíces complejas conjugadas con los siguientes parámetros:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$$

Por lo tanto, la solución complementaria:

$$y_c = C_1 e^{\alpha} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha} \sin(\beta x)$$

$$\boldsymbol{y_c = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)}$$

Método de coeficientes indeterminados:

$$y'' + y = 4x + 10\sin x$$
$$Dado: 4x \quad suponemos \quad y_{p1} = Ax + B$$
$$Dado: 10\sin x \quad \begin{matrix} por\ repeticion\ de\ la \\ forma\ de\ solucion\ suponemos \end{matrix} \quad y_{p2} = Cx\cos x + Dx\sin x$$

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Dx\sin x$$

$$y'_p = A + C\cos x - Cx\sin x + D\sin x + Dx\cos x$$
$$y''_p = -C\sin x - C\sin x - Cx\cos x + D\cos x + D\cos x - Dx\sin x$$
$$y''_p = -2C\sin x - Cx\cos x + 2D\cos x - Dx\sin x$$

Sustituir:

$$y'' + y = 4x + 10\sin x$$
$$-2C\sin x - Cx\cos x + 2D\cos x - Dx\sin x + Ax + B + Cx\cos x + Dx\sin x$$
$$= 4x + 10\sin x$$
$$-2C\sin x + 2D\cos x + Ax + B = 4x + 10\sin x$$
$$Ax + B - 2C\sin x + 2D\cos x = 4x + 10\sin x$$

Determinar coeficientes:

$$A = 4 \quad B = 0 \quad -2C = 10 \quad 2D = 0$$
$$\boldsymbol{A = 4 \quad B = 0 \quad C = -5 \quad D = 0}$$

Por lo tanto, la solución particular:

$$\boldsymbol{y_p = 4x + 5x\cos x}$$

La solución general:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + 4x - 5x\cos x}$$

TEMA 3. METODO DEL ANULADOR

$$y'' + y = x\cos x - \cos x$$

Ecuación homogénea relacionada:

$$y'' + y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 1 = 0$$
$$m^2 = -1$$
$$m = \sqrt{-1}$$
$$m_1 = i \qquad m_2 = -i$$

Se tienen raíces complejas conjugadas con los siguientes parámetros:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1$$

Por lo tanto, la solución complementaria:

$$y_c = C_1e^{\alpha}\cos(\beta x) + C_2e^{\alpha}\sin(\beta x)$$

$$\boldsymbol{y_c = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)}$$

Operadores anuladores:

$$x\cos x \quad con\ parametros \quad n=2 \quad \alpha=0 \quad \beta=1$$
$$el\ anulador\ es \quad [D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n \quad = \quad (D^2+1)^2$$

$$\cos x \quad con\ parametros \quad n=1 \quad \alpha=0 \quad \beta=1$$
$$el\ anulador\ es \quad [D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n \quad = \quad D^2+1$$

En conjunto, el operador anulador será:
$$(D^2+1)^2$$

Aplicando el operador anulador:
$$(D^2+1)^2[y''+y=x\cos x-\cos x]$$
$$(D^2+1)^2[D^2y+y=x\cos x-\cos x]$$
$$(D^2+1)^2(D^2+1)y=(D^2+1)^2x\cos x-(D^2+1)^2\cos x$$
$$(D^2+1)^3y=0$$
$$D^2+1=0 \quad D^2+1=0 \quad D^2+1=0$$
$$D=\sqrt{-1} \quad D=\sqrt{-1} \quad D=\sqrt{-1}$$
$$D=\pm i \quad D=\pm i \quad D=\pm i$$

Se tienen raíces complejas conjugadas con los siguientes parámetros:
$$\alpha=0 \qquad \beta=1$$
Con multiplicidad 3

La posible solución particular es:
$$y_p=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x+C_5x^2\cos x+C_6x^2\sin x$$

Como podemos observar, la posible solución particular contiene a la solución complementaria. Entonces:

$$y_p=Ax\cos x+Bx\sin x+Cx^2\cos x+Dx^2\sin x$$
$$y'_p=A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x+2Cx\cos x-Cx^2\sin x+2Dx\sin x$$
$$+Dx^2\cos x$$
$$y'_p=A\cos x+B\sin x+(2D-A)x\sin x+(B+2C)x\cos x-Cx^2\sin x+Dx^2\cos x$$
$$y''_p=-A\sin x+B\cos x+(2D-A)\sin x+(2D-A)x\cos x+(B+2C)\cos x$$
$$-(B+2C)x\sin x-2Cx\sin x-Cx^2\cos x+2Dx\cos x-Dx^2\sin x$$
$$y''_p=(2B+2C)\cos x+(2D-2A)\sin x+(4D-A)x\cos x-(B+4C)x\sin x$$
$$-Cx^2\cos x-Dx^2\sin x$$

Sustituir:
$$y''+y=x\cos x-\cos x$$
$$(2B+2C)\cos x+(2D-2A)\sin x+(4D-A)x\cos x-(B+4C)x\sin x-Cx^2\cos x$$
$$-Dx^2\sin x+Ax\cos x+Bx\sin x+Cx^2\cos x+Dx^2\sin x$$
$$=x\cos x-\cos x$$
$$(2B+2C)\cos x+(2D-2A)\sin x+(4D)x\cos x-(4C)x\sin x=x\cos x-\cos x$$

Determinar coeficientes:

$$2B + 2C = -1 \quad 2D - 2A = 0 \quad 4D = 1 \quad -4C = 0$$

$$B = \frac{-1 - 2C}{2} \quad A = \frac{2D}{2} \quad D = \frac{1}{4} \quad C = 0$$

$$\boldsymbol{B = -\frac{1}{2} \quad A = \frac{1}{4} \quad D = \frac{1}{4} \quad C = 0}$$

Por lo tanto, la solución particular:

$$\boldsymbol{y_p = \frac{1}{4} x \cos x - \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{4} x^2 \sin x}$$

La solución general:

$$\boldsymbol{y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \frac{1}{4} x \cos x - \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{4} x^2 \sin x}$$