Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *31/10/11* *Matemática Aplicada 2N*

Tercer Examen Parcial

Temario **A**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. TRANSFORMADA DE FOURIER POR PARTES

Calcule la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(at), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

SOLUCION

Definición de la Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-1}^{1} \sin(at) \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = 0 + \int_{-1}^{1} \sin(at) \cdot e^{-i\omega t}\, dt + 0$$

Utilizando la identidad:

$$\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

Sustituyendo:

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} \left(e^{iat} - e^{-iat}\right) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} e^{iat} \cdot e^{-i\omega t}\, dt - \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} e^{-iat} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} e^{i(a-\omega)t}\, dt - \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1} e^{-i(a+\omega)t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i^2(a-\omega)}\left[e^{i(a-\omega)t}\right]_{t=-1}^{1} + \frac{1}{2i^2(a+\omega)}\left[e^{-i(a+\omega)t}\right]_{t=-1}^{1}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i^2(a-\omega)}\left(e^{i(a-\omega)} - e^{-i(a-\omega)}\right) + \frac{1}{2i^2(a+\omega)}\left(e^{-i(a+\omega)} - e^{i(a+\omega)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i(a-\omega)}\left(\frac{e^{i(a-\omega)} - e^{-i(a-\omega)}}{2i}\right) - \frac{1}{i(a+\omega)}\left(\frac{e^{i(a+\omega)} - e^{-i(a+\omega)}}{2i}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i(a-\omega)}\sin(a-\omega) - \frac{1}{i(a+\omega)}\sin(a+\omega)$$

$$F(\omega) = -\frac{i\sin(a-\omega)}{(a-\omega)} + \frac{i\sin(a+\omega)}{(a+\omega)}$$

$$F(\omega) = \frac{i\sin(a+\omega)}{(a+\omega)} - \frac{i\sin(a-\omega)}{(a-\omega)}$$

$$F(\omega) = \frac{i\sin(\omega+a)}{(\omega+a)} - \frac{-i\sin(\omega-a)}{-(\omega-a)}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \frac{i\sin(\omega+a)}{(\omega+a)} - \frac{i\sin(\omega-a)}{(\omega-a)}}$$

Utilizando la identidad:

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

Entonces:

$$F(\omega) = i\operatorname{sinc}(\omega+a) - i\operatorname{sinc}(\omega-a)$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = i[\operatorname{sinc}(\omega+a) - \operatorname{sinc}(\omega-a)]}$$

TEMA 2. DEMOSTRACION DE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER

Verifique

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)\,H(t)] = \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

SOLUCION

Demostración, utilizando el par transformado del escalón unitario y las propiedades de la transformada de Fourier.

Tenemos que el escalón unitario de Heaviside se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Utilizando la tabla de transformadas, encontramos el par transformado de Fourier:

$$\mathcal{F}[H(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

También utilizando la identidad:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

Tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} H(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{H(t)e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{H(t)e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\}$$

Utilizando la propiedad de ***Linealidad*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 F(\omega) + c_2 G(\omega)$$

Tenemos:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)e^{-i\omega_0 t}\}$$

Ahora utilizando la propiedad de ***Traslación en la Frecuencia*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}\left[e^{i\omega_0 t}\cdot f(t)\right] = F(\omega)_{\omega\to\omega-\omega_0} = F(\omega - \omega_0)$$

Tenemos entonces:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)\}_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)\}_{\omega\to\omega+\omega_0}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right]_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right]_{\omega\to\omega+\omega_0}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{i(\omega - \omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{i(\omega + \omega_0)}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega+\omega_0)}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{\omega+\omega_0+\omega-\omega_0}{2i(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{2\omega}{2i(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{i\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]}$$

TEMA 3. SERIE FINITA DE FOURIER

Calcule la serie finita de Fourier del siguiente conjunto de datos

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -1, \qquad f(3) = -1, \qquad y \quad N = 2$$

SOLUCION

La serie de Fourier finita hasta N armónicos:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \cos\left(\frac{\pi k}{N} t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{N} t\right) \right]$$

El período de la función para $N = 2$:

$$T_0 = 2 \cdot N = 2 \cdot 2 = 4$$

Valores de t: $t = \{0, 1, 2, 3\}$

Valores de f: $f(t) = \{1, 1, -1, -1\}$

Coeficientes de Coseno:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{4} f(t_m) \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{N} t_m\right) \qquad para\ k = 0,1,2, \dots, N$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 3\right)\right]$$

$$a_0 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(0) - 1 \cdot \cos(0) - 1 \cdot \cos(0)]$$

$$a_0 = 1/2[1 + 1 - 1 - 1]$$

$$a_0 = 0$$

Para $k = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 3\right)\right]$$

$$a_1 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\pi/2) - 1 \cdot \cos(\pi) - 1 \cdot \cos(3\pi/2)]$$

$$a_1 = 1/2[1 + 0 + 1 - 0]$$

$$a_1 = 1$$

Para $k = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 3\right)\right]$$

$$a_2 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\pi) - 1 \cdot \cos(2\pi) - 1 \cdot \cos(3\pi)]$$

$$a_2 = 1/2[1 - 1 - 1 + 1]$$

$$a_2 = 0$$

Coeficientes de Seno

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{4} f(t_m)\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{N}t_m\right) \qquad para\ k = 1,2,\dots,N$$

Para $k = 1$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[f(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}0\right) + f(1)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}1\right) + f(2)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}2\right) + f(3)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}3\right)\right]$$

$$b_1 = 1/2[1\cdot\sin(0) + 1\cdot\sin(\pi/2) - 1\cdot\sin(\pi) - 1\cdot\sin(3\pi/2)]$$

$$b_1 = 1/2[0 + 1 - 0 + 1]$$

$$b_1 = 1$$

Para $k = 2$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[f(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}0\right) + f(1)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}1\right) + f(2)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}2\right) + f(3)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}3\right)\right]$$

$$b_2 = 1/2[1\cdot\sin(0) + 1\cdot\sin(\pi) - 1\cdot\sin(2\pi) - 1\cdot\sin(3\pi)]$$

$$b_2 = 1/2[0 + 0 - 0 + 0]$$

$$b_2 = 0$$

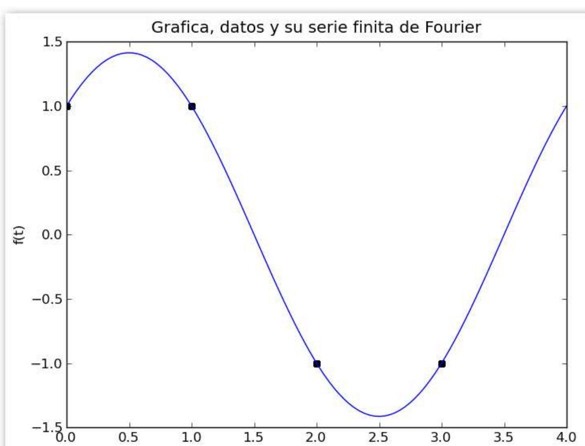
La serie de Fourier finita hasta $N = 2$ *armónicos:*

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}\left[a_k\cos\left(\frac{\pi k}{2}t\right) + b_k\sin\left(\frac{\pi k}{2}t\right)\right]$$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}t\right) + a_2\cos\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}t\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}t\right) + b_2\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}t\right)$$

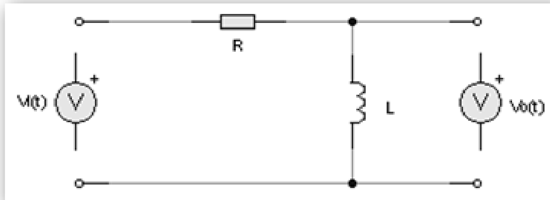
$$S(t) = \frac{0}{2} + 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 0\cdot\cos(\pi t) + 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 0\cdot\sin(\pi t)$$

$$\boldsymbol{S(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$



TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA ED

Si $\mathcal{F}[v_i(t)] = V_i(\omega)$ y $\mathcal{F}[v_o(t)] = V_o(\omega)$, usando propiedades de transformada de Fourier calcule $|V_o(\omega)/V_i(\omega)|$ y dibuje este espectro de magnitud, para el circuito



SOLUCION

Voltaje en la inductancia: $v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Voltaje en la resistencia: $v_R(t) = R\ i(t)$

Utilizando la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$v_i(t) = v_R(t) + v_L(t)$$
$$v_i(t) = R\ i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando la Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left[v_i(t) = R\ i(t) + L\frac{di(t)}{dt}\right]$$
$$\mathcal{F}[v_i(t)] = \mathcal{F}\left[R\ i(t) + L\frac{di(t)}{dt}\right]$$

*Utilizando la propiedad de **Linealidad** de la transformada de Fourier:*

$$V_i(\omega) = R\cdot\mathcal{F}[i(t)] + L\cdot\mathcal{F}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]$$

Sea la transformada de Fourier de la corriente del circuito:

$$\mathcal{F}[i(t)] = I(\omega)$$

*Utilizando la propiedad de la **Diferenciación en el tiempo** de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}\left[\frac{di(t)}{dt}\right] = j\omega\cdot I(\omega)$$

Entonces sustituyendo:

$$V_i(\omega) = R\cdot I(\omega) + L\cdot j\omega\cdot I(\omega)$$
$$V_i(\omega) = I(\omega)(R + j\omega L)$$

Despejando la corriente transformada:

$$I(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{(R + j\omega L)}$$

Ahora, vemos que la expresión del voltaje de salida es el voltaje en la inductancia:

$$v_o(t) = v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando la Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[v_o(t)] = \mathcal{F}\left[L\frac{di(t)}{dt}\right]$$
$$V_o(\omega) = j\omega L \cdot I(\omega)$$

Sustituyendo la expresión determinada de la corriente transformada:

$$V_o(\omega) = j\omega L \cdot \frac{V_i(\omega)}{R + j\omega L}$$

Despejando obtenemos la relación del voltaje transformado de salida sobre el de entrada:

$$\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Obtenemos la magnitud:

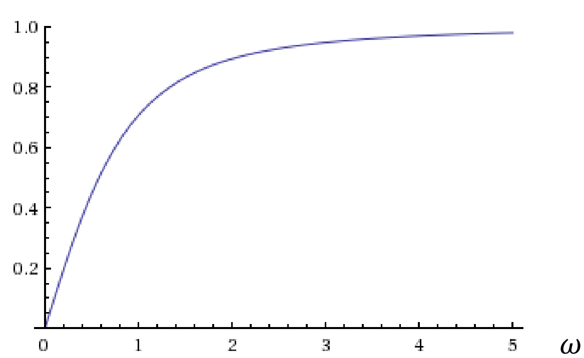
$$\left|\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}\right| = \left|\frac{j\omega L}{R + j\omega L}\right| = \frac{|j\omega L|}{|R + j\omega L|}$$

$$\boldsymbol{\left|\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}\right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}$$

$$\left|\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}\right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \frac{1/\omega L}{1/\omega L} = \frac{1}{\sqrt{(R/\omega L)^2 + 1}}$$

$$\boldsymbol{\left|\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + 1}}}$$

Espectro de magnitud $|V_o(\omega)/V_i(\omega)|$



Universidad de San Carlos
Facultad de Ingeniería 31/10/11 Departamento de Matemática
Matemática Aplicada 2N

Tercer Examen Parcial

Temario **B**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. TRANSFORMADA DE FOURIER POR PARTES

Calcule la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(at), & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

SOLUCION

Definición de la Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-1}^{1} \sin(at) \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{1}^{\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = 0 + \int_{-1}^{1} \sin(at) \cdot e^{-i\omega t}\, dt + 0$$

Utilizando la identidad:

$$\sin(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

Sustituyendo:

$$F(\omega) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^{1} \left(e^{iat} - e^{-iat}\right) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^{1} e^{iat} \cdot e^{-i\omega t}\, dt - \frac{1}{2i} \int_{-1}^{1} e^{-iat} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^{1} e^{i(a-\omega)t}\, dt - \frac{1}{2i} \int_{-1}^{1} e^{-i(a+\omega)t}\, dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i^2(a-\omega)} \left[e^{i(a-\omega)t}\right]_{t=-1}^{1} + \frac{1}{2i^2(a+\omega)} \left[e^{-i(a+\omega)t}\right]_{t=-1}^{1}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2i^2(a-\omega)} \left(e^{i(a-\omega)} - e^{-i(a-\omega)}\right) + \frac{1}{2i^2(a+\omega)} \left(e^{-i(a+\omega)} - e^{i(a+\omega)}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i(a-\omega)} \left(\frac{e^{i(a-\omega)} - e^{-i(a-\omega)}}{2i}\right) - \frac{1}{i(a+\omega)} \left(\frac{e^{i(a+\omega)} - e^{-i(a+\omega)}}{2i}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i(a-\omega)}\sin(a-\omega) - \frac{1}{i(a+\omega)}\sin(a+\omega)$$

$$F(\omega) = -\frac{i\sin(a-\omega)}{(a-\omega)} + \frac{i\sin(a+\omega)}{(a+\omega)}$$

$$F(\omega) = \frac{i\sin(a+\omega)}{(a+\omega)} - \frac{i\sin(a-\omega)}{(a-\omega)}$$

$$F(\omega) = \frac{i\sin(\omega+a)}{(\omega+a)} - \frac{-i\sin(\omega-a)}{-(\omega-a)}$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = \frac{i\sin(\omega+a)}{(\omega+a)} - \frac{i\sin(\omega-a)}{(\omega-a)}}$$

Utilizando la identidad:

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

Entonces:

$$F(\omega) = i\operatorname{sinc}(\omega+a) - i\operatorname{sinc}(\omega-a)$$

$$\boldsymbol{F(\omega) = i[\operatorname{sinc}(\omega+a) - \operatorname{sinc}(\omega-a)]}$$

TEMA 2. DEMOSTRACION DE UNA TRANSFORMADA DE FOURIER

Verifique

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)\, H(t)] = \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

SOLUCION

Demostración, utilizando el par transformado del escalón unitario y las propiedades de la transformada de Fourier.

Tenemos que el escalón unitario de Heaviside se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Utilizando la tabla de transformadas, encontramos el par transformado de Fourier:

$$\mathcal{F}[H(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

También utilizando la identidad:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

Tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} H(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{H(t)e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{H(t)e^{-i\omega_0 t}}{2}\right\}$$

Utilizando la propiedad de ***Linealidad*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 F(\omega) + c_2 G(\omega)$$

Tenemos:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{H(t)e^{i\omega_0 t}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{H(t)e^{-i\omega_0 t}\right\}$$

Ahora utilizando la propiedad de ***Traslación en la Frecuencia*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}\left[e^{i\omega_0 t}\cdot f(t)\right] = F(\omega)_{\omega\to\omega-\omega_0} = F(\omega-\omega_0)$$

Tenemos entonces:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)\}_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{H(t)\}_{\omega\to\omega+\omega_0}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right]_{\omega\to\omega-\omega_0} + \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}\right]_{\omega\to\omega+\omega_0}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\, H(t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{i(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{i(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega-\omega_0)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2i(\omega+\omega_0)}$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{\omega+\omega_0+\omega-\omega_0}{2i(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{2\omega}{2i(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\,H(t)\} = \frac{i\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]}$$

TEMA 3. SERIE FINITA DE FOURIER

Calcule la serie finita de Fourier del siguiente conjunto de datos

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 1, \qquad f(2) = -1, \qquad f(3) = -1, \qquad y \quad N = 2$$

SOLUCION

La serie de Fourier finita hasta N armónicos:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \cos\left(\frac{\pi k}{N} t\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k}{N} t\right) \right]$$

El período de la función para $N = 2$:

$$T_0 = 2 \cdot N = 2 \cdot 2 = 4$$

Valores de t: $t = \{0, 1, 2, 3\}$

Valores de f: $f(t) = \{1, 1, -1, -1\}$

Coeficientes de Coseno:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{4} f(t_m) \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{N} t_m\right) \qquad para\ k = 0,1,2, \dots, N$$

Para $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{2} 3\right) \right]$$

$$a_0 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(0) - 1 \cdot \cos(0) - 1 \cdot \cos(0)]$$

$$a_0 = 1/2[1 + 1 - 1 - 1]$$

$$a_0 = 0$$

Para $k = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2} 3\right) \right]$$

$$a_1 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\pi/2) - 1 \cdot \cos(\pi) - 1 \cdot \cos(3\pi/2)]$$

$$a_1 = 1/2[1 + 0 + 1 - 0]$$

$$a_1 = 1$$

Para $k = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[f(0) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 0\right) + f(1) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 1\right) + f(2) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 2\right) + f(3) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2} 3\right) \right]$$

$$a_2 = 1/2[1 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\pi) - 1 \cdot \cos(2\pi) - 1 \cdot \cos(3\pi)]$$

$$a_2 = 1/2[1 - 1 - 1 + 1]$$

$$a_2 = 0$$

Coeficientes de Seno

$$b_k = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{4} f(t_m)\cdot \sin\left(\frac{\pi k}{N} t_m\right) \qquad para\ k = 1,2,\dots,N$$

Para $k = 1$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[f(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}0\right) + f(1)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}1\right) + f(2)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}2\right) + f(3)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}3\right)\right]$$

$$b_1 = 1/2[1\cdot\sin(0) + 1\cdot\sin(\pi/2) - 1\cdot\sin(\pi) - 1\cdot\sin(3\pi/2)]$$

$$b_1 = 1/2[0 + 1 - 0 + 1]$$

$$b_1 = 1$$

Para $k = 2$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[f(0)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}0\right) + f(1)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}1\right) + f(2)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}2\right) + f(3)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}3\right)\right]$$

$$b_2 = 1/2[1\cdot\sin(0) + 1\cdot\sin(\pi) - 1\cdot\sin(2\pi) - 1\cdot\sin(3\pi)]$$

$$b_2 = 1/2[0 + 0 - 0 + 0]$$

$$b_2 = 0$$

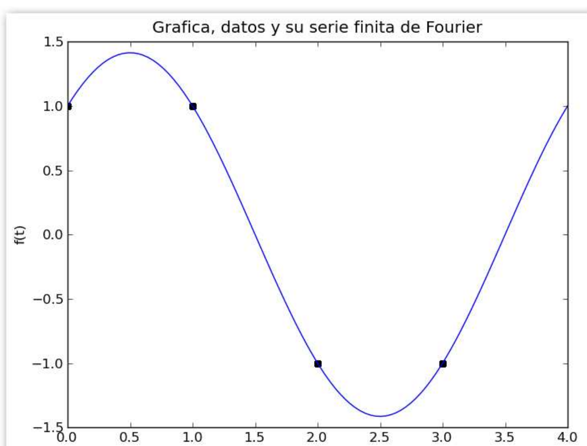
La serie de Fourier finita hasta $N = 2$ *armónicos:*

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2}\left[a_k\cos\left(\frac{\pi k}{2}t\right) + b_k\sin\left(\frac{\pi k}{2}t\right)\right]$$

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}t\right) + a_2\cos\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}t\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}t\right) + b_2\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}t\right)$$

$$S(t) = \frac{0}{2} + 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 0\cdot\cos(\pi t) + 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 0\cdot\sin(\pi t)$$

$$\boldsymbol{S(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$



TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA ED

Suponga que $\mathcal{F}[y(t)] = Y(\omega)$, tomando transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación diferencial, determine $Y(\omega)$ y grafique $|Y(\omega)|$

$$y'(t) + y(t) = \delta(t)$$

SOLUCION

Aplicando la Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[y'(t) + y(t) = \delta(t)]$$
$$\mathcal{F}[y'(t) + y(t)] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$

*Utilizando la propiedad de **Linealidad** de la Trasformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}[y'(t)] + \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$

*Utilizando la propiedad de **Diferenciación en el tiempo**, de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}[y'(t)] = j\omega \cdot Y(\omega)$$

Entonces tenemos:

$$j\omega \cdot Y(\omega) + Y(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)]$$

La función impulso unitario se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Con la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot g(t)\, dt = g(0)$$

Entonces la transformada de Fourier de la función impulso unitario es:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = e^{-i\omega(0)} = 1$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$j\omega \cdot Y(\omega) + Y(\omega) = 1$$

$$Y(\omega)(1 + j\omega) = 1$$

$$\boldsymbol{Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}}$$

Determinando su magnitud:

$$|Y(\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\omega}\right|$$

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega|}$$

$$\boldsymbol{|Y(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}}$$

Espectro de magnitud