Universidad de San Carlos Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería 31/10/11 Matemática Aplicada 5N

Tercer Examen Parcial

Temario **A**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. LIMITE COMPLEJO

Tomando límites en dirección horizontal y sobre la recta $y = x$, muestre que no existe el límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

SOLUCION

Para el límite en dirección horizontal, el valor de $y = 0$*, entonces:*

$$z = x + j0$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x - j0}{x + j0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ horizontal}} \frac{\bar{z}}{z} = 1$$

Para el límite sobre la recta $y = x$

$$z = x + jx = x(1 + j)$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x(1 - j)}{x(1 + j)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - j)}{(1 + j)} = \lim_{x\to 0} -j = -j$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ recta\ y=x}} \frac{\bar{z}}{z} = -j$$

Dado que el límite en dirección horizontal es distinto al límite sobre la recta $y = x$ *se dice que el límite no existe.*

$$\boldsymbol{1 \neq -j}$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{z\to 0\\ horizontal}} \frac{\bar{z}}{z} \neq \lim_{\substack{z\to 0\\ recta\ y=x}} \frac{\bar{z}}{z} \qquad entonces\ \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}\ no\ existe}$$

TEMA 2. DIFERENCIACION COMPLEJA

Para la función $f(z) = y^2 - ix^3$, determine y grafique los puntos donde existe su derivada y determine dicha derivada.

SOLUCION

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se determinan los puntos donde existe la derivada

$$f(z) = u + iv = y^2 - ix^3$$
$$u = y^2 \qquad v = -x^3$$

$$u_x = 0 \qquad u_y = 2y \qquad v_x = -3x^2 \qquad v_y = 0$$

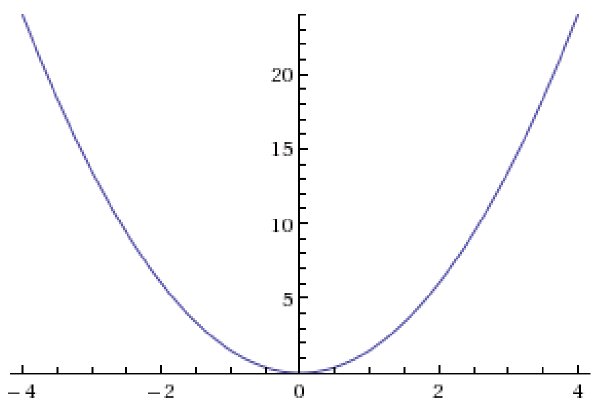
Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \qquad -u_y = v_x$$
$$0 = 0 \qquad -2y = -3x^2$$

Entonces la derivada existe sobre la curva:

$$-2y = -3x^2$$

$$y = \frac{3}{2}x^2$$



La derivada sobre la curva:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 - i3x^2 = -i3x^2$$

También puede ser:

$$f'(z) = v_y - iu_y = 0 - i2y = -i2y$$

Entonces:

$$\boldsymbol{f'(z) = -i3x^2 = -i2y \qquad sobre\ la\ curva\ \ y = \frac{3}{2}x^2}$$

TEMA 3. APLICACIÓN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Un cable cilíndrico no-coaxial está formado por un cilindro de radio 1 centrado en el origen y otro de radio $2/5$ centrado en $(2/5, 0)$. La función potencial electrostática compleja entre los dos cilindro esta dada por

$$g(z) = \frac{Q}{\ln 2} \ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)$$

Donde Q es constante

a) Determine el campo eléctrico estático $\mathbf{E}$ en $z = -i$

b) Calcule la intensidad del campo estático $|\boldsymbol{E}|$ en $z = i$

SOLUCION

El campo eléctrico estático complejo se determina como:

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-g'(z)}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{\ln 2}\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)\right)} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\frac{d}{dz}\left(\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)\right)}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{z-2}{2z-1}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{z-2}{2z-1}\cdot\frac{(z-2)(2)-(2z-1)(1)}{(z-2)^2}}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2z-1}\cdot\frac{2z-4-2z+1}{z-2}} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2z-1}\cdot\frac{-3}{z-2}}$$

$$\boldsymbol{\mathbf{E}(z) = \overline{\frac{3Q}{\ln 2}\cdot\frac{1}{(2z-1)(z-2)}}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{(2(x+jy)-1)(x+jy-2)}} = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{(2x+j2y-1)(x+jy-2)}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}\cdot\frac{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}{(2x^2-5x-2y^2+2)^2+(4x-5)^2y^2}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\frac{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}{(2x^2-5x-2y^2+2)^2+(4x-5)^2y^2}$$

a) *El campo eléctrico estático en $z = -i$, entonces $(x, y) = (0, -1)$*

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{0 - 0 - 2(-1)^2 + 2 + j(0-5)(-1)}{(0 - 0 - 2(-1)^2 + 2)^2 + (0-5)^2(-1)^2}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-2 + 2 + j5}{(-2+2)^2 + 25}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{j5}{25} = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{j}{5}$$

$$\mathbf{E(0,-1)} = \boldsymbol{j\frac{3Q}{5\ln 2} = j0.8656 \cdot Q}$$

b) *La intensidad de campo eléctrico en $z = i$, entonces $(x, y) = (0,1)$*

Campo eléctrico estático complejo:

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{0 - 0 - 2(1)^2 + 2 + j(0-5)(1)}{(0 - 0 - 2(1)^2 + 2)^2 + (0-5)^2(1)^2}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-2 + 2 - j5}{(-2+2)^2 + 25}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-j5}{25}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-j}{5}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = -j\frac{3Q}{5\ln 2}$$

Intensidad de campo eléctrico:

$$|\mathbf{E}(0,1)| = \left|-j\frac{3Q}{5\ln 2}\right| = \frac{3Q}{5\ln 2}$$

$$|\mathbf{E(0,1)}| = \boldsymbol{\frac{3Q}{5\ln 2} = 0.8656 \cdot Q}$$

TEMA 4. FUNCIÓN ANALÍTICA

Dada la función

$$u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$

a) Muestre que $\Delta u = 0$ en todo el plano complejo,
b) Determine su armónica conjugada $v(x,y)$,
c) Construya la función analítica asociada

SOLUCION

El laplaciano se define como:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Derivada:

$$u_x = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \qquad u_y = -3x^2 - 6xy + 3y^2$$
$$u_{xx} = 6x - 6y \qquad u_{yy} = -6x + 6y$$

Entonces el laplaciano:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$
$$\Delta u = 6x - 6y - 6x + 6y$$

$$\boldsymbol{\Delta u = 0 \qquad para\ todo\ el\ plano\ complejo}$$

Determinar la función armónica conjugada, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \qquad -u_y = v_x$$
$$v_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \qquad v_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

Integrando v_y respecto a y, manteniendo constante x

$$v = \int v_y\,dy = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2)\,dy = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + h(x)$$

Donde $h(x)$ es una función real arbitraria de x

Derivando v en x, tenemos

$$\frac{dv}{dx} = 6xy - 3y^2 + h'(x)$$

Comparar con v_x encontrada con la ecuación de Cauchy-Riemann

$$6xy - 3y^2 + h'(x) = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$
$$h'(x) = 3x^2$$

Integrando $h'(x) = 3x^2$ respecto a x

$$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3$$

Sustituyendo en v

$$\boldsymbol{v(x,y) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3}$$

Determinar la función analítica asociada:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$\boldsymbol{f(z) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + j(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3)}$$

Con $y = 0$

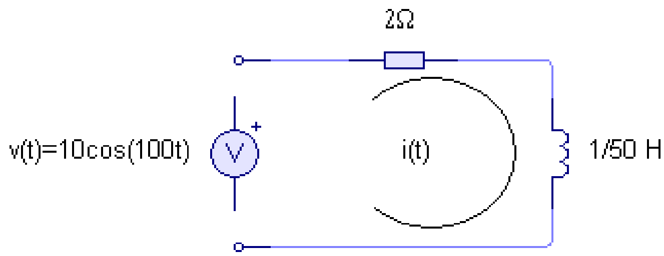
$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0)$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2(0) - 3x(0) + 0 + j(x^3 + 3x^2(0) - 3x(0) - 0)$$
$$f(x) = x^3 + jx^3$$
$$f(x) = (1 + j)x^3$$

Sustituyendo x *por* z

$$\boldsymbol{f(z) = (1 + j)z^3}$$

TEMA 5. ED CON EXPONENCIAL COMPLEJA

Considere el circuito



a) Usando la técnica de ecuaciones diferenciales con exponencial compleja determine la corriente $i(t)$,
b) Exprese la tensión, la corriente e impedancia en su forma fasorial y dibújelos.

SOLUCION

Expresando la fuente de tensión en exponenciales complejas:

$$v(t) = 10\cos(100t) = 10 \cdot \frac{e^{j100t} + e^{-j100t}}{2} = 5e^{j100t} + 5e^{-j100t}$$

Entonces se sustituye por dos fuentes de tensión complejas:

$$v_1(t) = 5e^{j100t} \qquad v_2(t) = 5e^{-j100t}$$

Por principio de superposición: $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

Donde: $i_1(t)$ *es la corriente generada por* $v_1(t)$*, e* $i_2(t)$ *es la corriente generada por* $v_2(t)$

Determinar $i_1(t)$ por ecuaciones diferenciales

Voltaje en la resistencia: $v_R = Ri = 2i$

Voltaje en la inductancia: $v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{50}\frac{di}{dt}$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$v_1(t) = v_R + v_L$$
$$v_1(t) = Ri_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}$$
$$5e^{j100t} = 2i_1(t) + \frac{1}{50}\frac{di_1(t)}{dt}$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$i_1(t) = Ae^{j100t}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = j100Ae^{j100t}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$5e^{j100t} = 2Ae^{j100t} + \frac{1}{50}j100Ae^{j100t}$$
$$5e^{j100t} = 2Ae^{j100t} + j2Ae^{j100t}$$
$$5 = 2A + j2A$$
$$5 = 2A(1+j)$$
$$A = \frac{5}{2(1+j)} \cdot \frac{1-j}{1-j} = \frac{5(1-j)}{2(1^2+1^2)} = \frac{5}{4}(1-j) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{-j\pi/4}$$

Entonces la corriente es:

$$i_1(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{-j\pi/4}\,e^{j100t}$$
$$\boldsymbol{i_1(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{j(100t-\pi/4)}}$$

Determinar $\boldsymbol{i_2(t)}$ por ecuaciones diferenciales

Voltaje en la resistencia: $v_R = Ri = 2i$

Voltaje en la inductancia: $v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{50}\frac{di}{dt}$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$v_2(t) = v_R + v_L$$
$$v_2(t) = Ri_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$5e^{-j100t} = 2i_2(t) + \frac{1}{50}\frac{di_2(t)}{dt}$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$i_2(t) = Be^{-j100t} \qquad \frac{di_2(t)}{dt} = -j100Be^{-j100t}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$5e^{-j100t} = 2Be^{-j100t} - \frac{1}{50}j100Be^{-j100t}$$
$$5e^{-j100t} = 2Be^{-j100t} - j2Be^{-j100t}$$
$$5 = 2B - j2B$$
$$5 = 2B(1-j)$$
$$B = \frac{5}{2(1-j)} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{5(1+j)}{2(1^2+1^2)} = \frac{5}{4}(1+j) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{j\pi/4}$$

Entonces la corriente es:

$$i_2(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{j\pi/4}\,e^{-j100t}$$
$$\boldsymbol{i_2(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4}e^{-j(100t-\pi/4)}}$$

La corriente total, por principio de superposición:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$i(t) = \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{j(100t-\pi/4)} + \frac{5\sqrt{2}}{4} e^{-j(100t-\pi/4)} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{e^{j(100t-\pi/4)} + e^{-j(100t-\pi/4)}}{2}$$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(100t - \pi/4)}$$

Exprese la tensión, la corriente e impedancia en su forma fasorial y dibújelos.

La tensión:

$$v(t) = 10\cos(100t) = 10\sin(100t + \pi/2) \quad entonces \quad V_{rms} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad \omega = 100 \quad \theta = \pi/2$$

El fasor de tensión:

$$\boldsymbol{V = \frac{10}{\sqrt{2}} \measuredangle \pi/2}$$

La corriente:

$$i(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(100t - \pi/4) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(100t - \pi/4 + \pi/2) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(100t + \pi/4)$$

$$I_{rms} = \frac{5}{2} \quad \omega = 100 \quad \theta = \pi/4$$

El fasor de corriente:

$$\boldsymbol{I = \frac{5}{2} \measuredangle \pi/4}$$

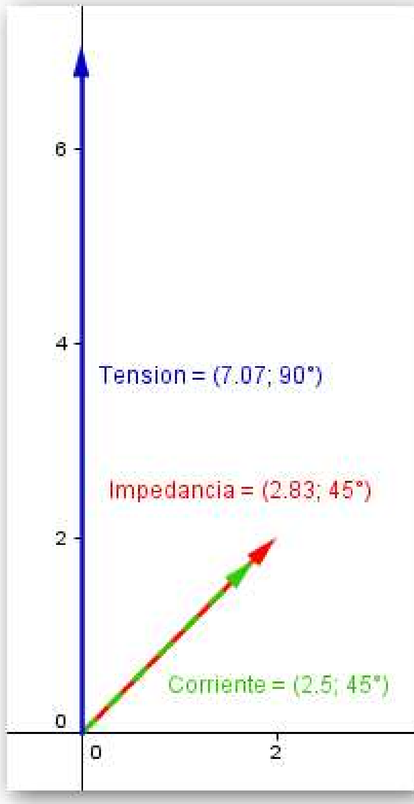
La impedancia:

$$Z = R + j\omega L = 2 + j100/50 = 2 + j2 = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4}$$

El fasor de la impedancia:

$$\boldsymbol{Z = 2\sqrt{2} \measuredangle \pi/4}$$

Gráficas de Fasores:



Nota: también puede dejarse el fasor V sobre el semieje horizontal positivo y la corriente en 4to cuadrante.

Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *31/10/11* *Matemática Aplicada 5N*

Tercer Examen Parcial

Temario **B**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. LIMITE COMPLEJO

Tomando límites en dirección vertical y sobre la recta $y = x$, muestre que no existe el límite

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}}$$

SOLUCION

Para el límite en dirección vertical, el valor de $x = 0$*, entonces:*

$$z = 0 + jy$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{0+jy}{0-jy} = \lim_{y\to 0}\frac{jy}{-jy} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ vertical}}\frac{\bar{z}}{z} = -1$$

Para el límite sobre la recta $y = x$

$$z = x + jx = x(1+j)$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x(1+j)}{x(1-j)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+j)}{(1-j)} = \lim_{x\to 0} j = j$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ recta\ y=x}}\frac{\bar{z}}{z} = j$$

Dado que el límite en dirección horizontal es distinto al límite sobre la recta $y = x$ *se dice que el límite no existe.*

$$\boldsymbol{-1 \neq j}$$

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{z\to 0\\ horizontal}}\frac{\bar{z}}{z} \neq \lim_{\substack{z\to 0\\ sobre\ recta\ y=x}}\frac{\bar{z}}{z} \qquad entonces\ \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}\ no\ existe}$$

TEMA 2. DIFERENCIACION COMPLEJA

Para la función $f(z) = y^2 + ix^3$, determine y grafique los puntos donde existe su derivada y determine dicha derivada.

SOLUCION

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann se determinan los puntos donde existe la derivada

$$f(z) = u + iv = y^2 + ix^3$$
$$u = y^2 \qquad v = x^3$$

$$u_x = 0 \qquad u_y = 2y \qquad v_x = 3x^2 \qquad v_y = 0$$

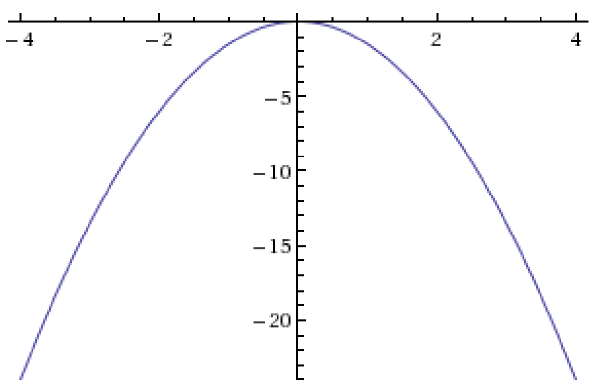
Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \qquad -u_y = v_x$$
$$0 = 0 \qquad -2y = 3x^2$$

Entonces la derivada existe sobre la curva:

$$-2y = 3x^2$$

$$y = -\frac{3}{2}x^2$$



La derivada sobre la curva:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i3x^2 = i3x^2$$

También puede ser:

$$f'(z) = v_y - iu_y = 0 - i2y = -i2y$$

Entonces:

$$\boldsymbol{f'(z) = i3x^2 = -i2y \qquad \text{sobre la curva} \quad y = -\frac{3}{2}x^2}$$

TEMA 3. APLICACIÓN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Un cable cilíndrico no-coaxial está formado por un cilindro de radio 1 centrado en el origen y otro de radio $2/5$ centrado en $(2/5, 0)$. La función potencial electrostática compleja entre los dos cilindro esta dada por

$$g(z) = \frac{Q}{\ln 2} \ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)$$

Donde Q es constante

c) Determine el campo eléctrico estático $\mathbf{E}$ en $z = i$
d) Calcule la intensidad del campo estático $|\boldsymbol{E}|$ en $z = -i$

SOLUCION

El campo eléctrico estático complejo se determina como:

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-g'(z)}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{d}{dz}\left(\frac{Q}{\ln 2}\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)\right)} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\frac{d}{dz}\left(\ln\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)\right)}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{z-2}{2z-1}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-1}{z-2}\right)} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{z-2}{2z-1}\cdot\frac{(z-2)(2)-(2z-1)(1)}{(z-2)^2}}$$

$$\mathbf{E}(z) = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2z-1}\cdot\frac{2z-4-2z+1}{z-2}} = \overline{-\frac{Q}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2z-1}\cdot\frac{-3}{z-2}}$$

$$\boldsymbol{\mathbf{E}(z) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{(2z-1)(z-2)}}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{(2(x+jy)-1)(x+jy-2)}} = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{(2x+j2y-1)(x+jy-2)}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{1}{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}\cdot\frac{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\overline{\frac{2x^2-5x-2y^2+2-j(4x-5)y}{(2x^2-5x-2y^2+2)^2+(4x-5)^2y^2}}$$

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{3Q}{\ln 2}\cdot\frac{2x^2-5x-2y^2+2+j(4x-5)y}{(2x^2-5x-2y^2+2)^2+(4x-5)^2y^2}$$

a) *El campo eléctrico estático en $z = i$, entonces $(x, y) = (0,1)$*

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{0 - 0 - 2(1)^2 + 2 + j(0-5)(1)}{(0-0-2(1)^2+2)^2 + (0-5)^2(1)^2}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-2 + 2 - j5}{(-2+2)^2 + 25}$$

$$\mathbf{E}(0,1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-j5}{25} = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-j}{5}$$

$$\mathbf{E(0,1)} = -\boldsymbol{j}\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{Q}}{\mathbf{5\ln 2}} = -\boldsymbol{j}\mathbf{0.8656} \cdot \boldsymbol{Q}$$

b) *La intensidad de campo eléctrico en $z = -i$, entonces $(x, y) = (0, -1)$*
Campo eléctrico estático complejo:

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{0 - 0 - 2(-1)^2 + 2 + j(0-5)(-1)}{(0-0-2(-1)^2+2)^2 + (0-5)^2(-1)^2}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{-2 + 2 + j5}{(-2+2)^2 + 25}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{j5}{25}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = \frac{3Q}{\ln 2} \cdot \frac{j}{5}$$

$$\mathbf{E}(0,-1) = j\frac{3Q}{5\ln 2}$$

Intensidad de campo eléctrico:

$$|\mathbf{E}(0,-1)| = \left| j\frac{3Q}{5\ln 2} \right| = \frac{3Q}{5\ln 2}$$

$$|\mathbf{E(0,-1)}| = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{Q}}{\mathbf{5\ln 2}} = \mathbf{0.8656} \cdot \boldsymbol{Q}$$

TEMA 4. FUNCION ANALÍTICA

Dada la función

$$u(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3xy^3 + y^3$$

d) Muestre que $\Delta u = 0$ en todo el plano complejo,
e) Determine su armónica conjugada $v(x,y)$,
f) Construya la función analítica asociada

SOLUCION

El laplaciano se define como:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Derivada:

$$u_x = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \qquad u_y = -3x^2 - 6xy + 3y^2$$
$$u_{xx} = 6x - 6y \qquad u_{yy} = -6x + 6y$$

Entonces el laplaciano:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$
$$\Delta u = 6x - 6y - 6x + 6y$$

$$\boldsymbol{\Delta u = 0 \qquad para\ todo\ el\ plano\ complejo}$$

Determinar la función armónica conjugada, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \qquad -u_y = v_x$$
$$v_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \qquad v_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

Integrando v_y respecto a y, manteniendo constante x

$$v = \int v_y\,dy = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2)\,dy = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + h(x)$$

Donde $h(x)$ es una función real arbitraria de x

Derivando v en x, tenemos

$$\frac{dv}{dx} = 6xy - 3y^2 + h'(x)$$

Comparar con v_x encontrada con la ecuación de Cauchy-Riemann

$$6xy - 3y^2 + h'(x) = 3x^2 + 6xy - 3y^2$$
$$h'(x) = 3x^2$$

Integrando $h'(x) = 3x^2$ respecto a x

$$h(x) = \int h'(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3$$

Sustituyendo en v

$$\boldsymbol{v(x,y) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3}$$

Determinar la función analítica asociada:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

$$\boldsymbol{f(z) = x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + j(x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3)}$$

Con $y = 0$

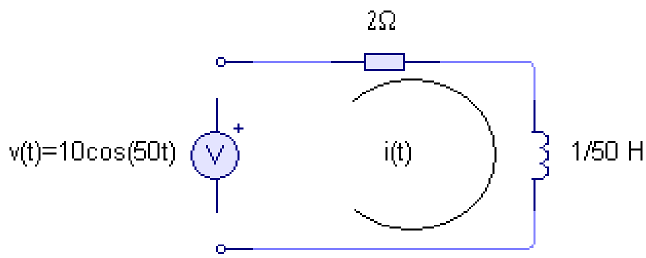
$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0)$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2(0) - 3x(0) + 0 + j(x^3 + 3x^2(0) - 3x(0) - 0)$$
$$f(x) = x^3 + jx^3$$
$$f(x) = (1 + j)x^3$$

Sustituyendo x *por* z

$$\boldsymbol{f(z) = (1 + j)z^3}$$

TEMA 5. ED CON EXPONENCIAL COMPLEJA

Considere el circuito



a) Usando la técnica de ecuaciones diferenciales con exponencial compleja determine la corriente $i(t)$,
b) Exprese la tensión, la corriente e impedancia en su forma fasorial y dibújelos.

SOLUCION

Expresando la fuente de tensión en exponenciales complejas:

$$v(t) = 10\cos(50t) = 10 \cdot \frac{e^{j50t} + e^{-j50t}}{2} = 5e^{j50t} + 5e^{-j50t}$$

Entonces se sustituye por dos fuentes de tensión complejas:

$$v_1(t) = 5e^{j50t} \qquad v_2(t) = 5e^{-j50t}$$

Por principio de superposición: $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

Donde: $i_1(t)$ *es la corriente generada por* $v_1(t)$*, e* $i_2(t)$ *es la corriente generada por* $v_2(t)$

Determinar $\boldsymbol{i_1(t)}$ ***por ecuaciones diferenciales***

Voltaje en la resistencia: $v_R = Ri = 2i$

Voltaje en la inductancia: $v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{50}\frac{di}{dt}$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$v_1(t) = v_R + v_L$$
$$v_1(t) = Ri_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt}$$
$$5e^{j50t} = 2i_1(t) + \frac{1}{50}\frac{di_1(t)}{dt}$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$i_1(t) = Ae^{j50t}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = j50Ae^{j50t}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$5e^{j50t} = 2Ae^{j50t} + \frac{1}{50}j50Ae^{j50t}$$
$$5e^{j50t} = 2Ae^{j50t} + jAe^{j50t}$$
$$5 = 2A + jA$$
$$5 = A(2 + j)$$
$$A = \frac{5}{(2+j)} \cdot \frac{2-j}{2-j} = \frac{5(2-j)}{(2^2+1^2)} = \frac{5}{5}(2-j) = \sqrt{5}e^{-j0.4636}$$

Entonces la corriente es:

$$i_1(t) = \sqrt{5}e^{-j0.4636}\,e^{j50t}$$
$$\boldsymbol{i_1(t) = \sqrt{5} \cdot e^{j(50t-0.4636)}}$$

Determinar $i_2(t)$ por ecuaciones diferenciales

Voltaje en la resistencia: $v_R = Ri = 2i$

Voltaje en la inductancia: $v_L = L\frac{di}{dt} = \frac{1}{50}\frac{di}{dt}$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$v_2(t) = v_R + v_L$$
$$v_2(t) = Ri_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$5e^{-j50t} = 2i_2(t) + \frac{1}{50}\frac{di_2(t)}{dt}$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$i_2(t) = Be^{-j50t}$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -j50Be^{-j50t}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$5e^{-j50t} = 2Be^{-j50t} - \frac{1}{50}j50Be^{-j50t}$$
$$5e^{-j50t} = 2Be^{-j50t} - jBe^{-j50t}$$
$$5 = 2B - jB$$
$$5 = B(2 - j)$$
$$B = \frac{5}{(2-j)} \cdot \frac{2+j}{2+j} = \frac{5(2+j)}{(2^2+1^2)} = \frac{5}{5}(2+j) = \sqrt{5} \cdot e^{j0.4636}$$

Entonces la corriente es:

$$i_2(t) = \sqrt{5} \cdot e^{j0.4636}\,e^{-j50t}$$
$$\boldsymbol{i_2(t) = \sqrt{5} \cdot e^{-j(50t-0.4636)}}$$

La corriente total, por principio de superposición:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$i(t) = \sqrt{5}e^{j(50t-0.4636)} + \sqrt{5}e^{-j(50t-0.4636)} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{e^{j(50t-0.4636)} + e^{-j(50t-0.4636)}}{2}$$

$$\boldsymbol{i(t) = 2\sqrt{5} \cdot \cos(50t - 0.4636)}$$

Exprese la tensión, la corriente e impedancia en su forma fasorial y dibújelos.

La tensión:

$$v(t) = 10\cos(50t) = 10\sin(50t + \pi/2) \quad entonces \quad V_{rms} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad \omega = 50 \quad \theta = \pi/2$$

El fasor de tensión:

$$\boldsymbol{V = \frac{10}{\sqrt{2}} \measuredangle \pi/2}$$

La corriente:

$$i(t) = 2\sqrt{5} \cdot \cos(50t - 0.4636) = 2\sqrt{5} \cdot \sin(50t - 0.4636 + \pi/2)$$
$$= 2\sqrt{5} \cdot \sin(50t + 1.1072)$$
$$I_{rms} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad \omega = 100 \quad \theta = 1.1072\, rad$$

El fasor de corriente:

$$\boldsymbol{I = \sqrt{10} \measuredangle 1.1072}$$

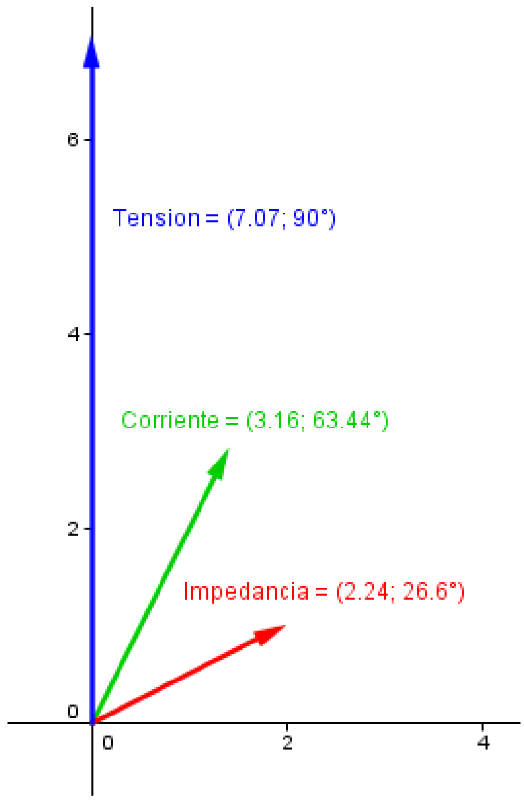
La impedancia:

$$Z = R + j\omega L = 2 + j50/50 = 2 + j = \sqrt{5} \cdot e^{j0.4636}$$

El fasor de la impedancia:

$$\boldsymbol{Z = \sqrt{5} \measuredangle 0.4636}$$

Gráficas de Fasores:



Nota: también puede dejarse el fasor V sobre el semieje horizontal positivo y la corriente en 4to cuadrante.