UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MATEMATICA INTERMEDIA 3 “N”
TERCER EXAMEN PARCIAL

Nombre.:___________________________________ Carné.:_____________________

Correo Electrónico.:____

Tema 1.:

Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante k = 16 N/m. Se alarga el resorte una distancia de 0.3 m y se suelta desde el reposo. Si sobre el sistema se aplica una fuerza F(t) = 1.5 Cos 4t, determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo.

Tema 2.:

Un circuito RLC en serie, está formado por un resistor R = 12 Ω, un capacitor C = 0.1 F y un inductor L = 2 H. Se le conecta una fuente de voltaje que suministra 20 Cos 5t Voltios. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t.

Tema 3.:

Explique la relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la constante del resorte, en un sistema masa-resorte en un movimiento libre amortiguado, cuando el discriminante de las raíces de la ecuación característica toma los siguientes valores:

a). $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

b). $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

c). $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

RESOLUCIÓN DEL TERCER EXAMEN PARCIAL

TEMA 1. APLICACIÓN: SISTEMA MASA-RESORTE

Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante k = 16 N/m. Se alarga el resorte una distancia de 0.3 m y se suelta desde el reposo. Si sobre el sistema se aplica una fuerza F(t) = 1.5 Cos 4t, determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo.

SOLUCION

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

Datos:

$$m=4kg \quad k=16\,N/m \quad \beta=0$$

Condiciones iniciales:

$$x(0)=0.3\,m \qquad x'(0)=0$$

Ecuación diferencial a resolver, para determinar la posición:

$$4\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+16\cdot x=1.5\cdot\cos 4t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\cdot x=\frac{3}{8}\cdot\cos 4t$$

Resolver la ecuación diferencial de la homogénea relacionada:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\cdot x=0$$

Ecuación característica:

$$m^2+4=0$$
$$m=\pm 2i$$

Solución complementaria:

$$\boldsymbol{x_C=C_1\cdot\cos 2t+C_2\cdot\sin 2t}$$

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\cdot x=\frac{3}{8}\cdot\cos 4t$$

Por el método de coeficientes constantes indeterminados, suponemos una solucion:

$$x_P=A\cdot\cos 4t+B\cdot\sin 4t$$
$$x'_P=-4A\cdot\sin 4t+4B\cdot\cos 4t$$
$$x''_P=-16A\cdot\cos 4t-16B\cdot\sin 4t$$

Sustituyendo:

$$-16A\cdot\cos 4t-16B\cdot\sin 4t+4A\cdot\cos 4t+4B\cdot\sin 4t=\frac{3}{8}\cdot\cos 4t$$
$$(4A-16A)\cdot\cos 4t+(4B-16B)\cdot\sin 4t=\frac{3}{8}\cdot\cos 4t$$

$$(-12A)\cdot\cos 4t+(-12B)\cdot\sin 4t=\frac{3}{8}\cdot\cos 4t$$

Igualando términos semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$-12A=\frac{3}{8}\qquad -12B=0$$

$$A=-\frac{1}{32}\qquad B=0$$

Solución particular:

$$\boldsymbol{x_P=\frac{1}{32}\cdot\cos 4t}$$

La solución total de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{x(t)=C_1\cdot\cos 2t+C_2\cdot\sin 2t+\frac{1}{32}\cdot\cos 4t}$$

Aplicar condiciones iniciales:

$$x(0)=0.3$$

$$C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0+\frac{1}{32}\cdot\cos 0=0.3$$

$$C_1+\frac{1}{32}=0.3$$

$$C_1=0.3-\frac{1}{32}=\frac{43}{160}$$

$$x(t)=\frac{43}{160}\cdot\cos 2t+C_2\cdot\sin 2t+\frac{1}{32}\cdot\cos 4t$$

$$x'(t)=-\frac{43}{160}\cdot\sin 2t+C_2\cdot\cos 2t-\frac{1}{32}\cdot\sin 4t$$

$$x'(0)=0$$

$$-\frac{43}{160}\cdot\sin 0+C_2\cdot\cos 0-\frac{1}{32}\cdot\sin 0=0$$

$$C_2=0$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial, y función posición:

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{43}{160}\cdot\cos 2t+\frac{1}{32}\cdot\cos 4t}$$

La función de la velocidad:

$$\boldsymbol{v(t)=x'(t)=-\frac{43}{160}\cdot\sin 2t-\frac{1}{32}\cdot\sin 4t}$$

TEMA 2. APLICACIÓN: CIRCUITO RLC

Un circuito RLC en serie, está formado por un resistor R = 12 Ω, un capacitor C = 0.1 F y un inductor L = 2 H. Se le conecta una fuente de voltaje que suministra 20 Cos 5t Voltios. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t.

SOLUCION

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E(t)$$

Datos:

$$R=12\,\Omega \quad C=0.1\,F \quad L=2\,H \quad E(t)=20\cos 5t$$

Condiciones iniciales:

$$q(0)=0 \qquad i(0)=q'(0)=0$$

Ecuación diferencial a resolver, para determinar la posición:

$$2\frac{d^2q}{dt^2}+12\frac{dq}{dt}+\frac{q}{0.1}=20\cos 5t$$
$$\frac{d^2q}{dt^2}+6\frac{dq}{dt}+5q=10\cos 5t$$

Resolver la ecuación diferencial de la homogénea relacionada:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+6\frac{dq}{dt}+5q=0$$

Ecuación característica:

$$m^2+6m+5=0$$
$$(m+1)(m+5)=0$$
$$m=-1 \qquad m=-5$$

Solución complementaria:

$$\boldsymbol{q_C=C_1\cdot e^{-t}+C_2\cdot e^{-5t}}$$

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2q}{dt^2}+6\frac{dq}{dt}+5q=10\cos 5t$$

Por el método de coeficientes constantes indeterminados, suponemos una solucion:

$$q_P=A\cdot\cos 5t+B\cdot\sin 5t$$
$$q'_P=-5A\cdot\sin 5t+5B\cdot\cos 5t$$
$$q''_P=-25A\cdot\cos 5t-25B\cdot\sin 5t$$

Sustituyendo:

$$-25A\cdot\cos 5t-25B\cdot\sin 5t-30A\cdot\sin 5t+30B\cdot\cos 5t+5A\cdot\cos 5t+5B\cdot\sin 5t$$
$$=10\cos 5t$$
$$(-25A-30B+5A)\cos 5t+(-25B-30A+5B)\sin 5t=10\cos 5t$$
$$(-20A-30B)\cos 5t+(-20B-30A)\sin 5t=10\cos 5t$$

Igualando términos semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$-20A - 30B = 10 \qquad -20B - 30A = 0$$
$$A = \frac{2}{5} \qquad B = -\frac{3}{5}$$

Solución particular:

$$\boldsymbol{q_P = \frac{2}{5} \cdot \cos 5t - \frac{3}{5} \cdot \sin 5t}$$

La solución total de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{q(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-5t} + \frac{2}{5} \cdot \cos 5t - \frac{3}{5} \cdot \sin 5t}$$

Aplicar condiciones iniciales:

$$q(0) = 0$$
$$C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + \frac{2}{5} \cdot \cos 0 - \frac{3}{5} \cdot \sin 0 = 0$$
$$C_1 + C_2 + \frac{2}{5} = 0$$
$$C_1 + C_2 = -\frac{2}{5}$$

$$q'(0) = 0$$
$$q'(t) = -C_1 \cdot e^{-t} - 5C_2 \cdot e^{-5t} - 2 \cdot \sin 5t - 3 \cdot \cos 5t$$
$$-C_1 \cdot e^0 - 5C_2 \cdot e^0 - 2 \cdot \sin 0 - 3 \cdot \cos 0 = 0$$
$$-C_1 - 5C_2 - 3 = 0$$
$$C_1 + 5C_2 = -3$$

Resolviendo el sistema:

$$C_1 = \frac{1}{4} \qquad C_2 = -\frac{13}{20}$$

Entonces la solución de la ecuación diferencial, y función de la carga eléctrica:

$$\boldsymbol{q(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - \frac{13}{20} \cdot e^{-5t} + \frac{2}{5} \cdot \cos 5t - \frac{3}{5} \cdot \sin 5t}$$

La función de la corriente:

$$\boldsymbol{i(t) = q'(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \frac{13}{4} \cdot e^{-5t} - 2 \cdot \sin 5t - 3 \cdot \cos 5t}$$

TEMA 3. CONCEPTOS DE AMORTIGUAMIENTO

Explique la relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la constante del resorte, en un sistema masa-resorte en un movimiento libre amortiguado, cuando el discriminante de las raíces de la ecuación característica toma los siguientes valores:

Solución:

El movimiento libre amortiguado de un sistema masa-resorte se describe por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Donde:

$m\ es\ la\ masa \quad \beta\ es\ la\ constante\ de\ amortiguamiento \quad k\ es\ la\ constante\ del\ resorte$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

Siendo:

$$2\lambda=\frac{\beta}{m} \qquad \omega^2=\frac{k}{m}$$

Entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$$

Ecuación característica:

$$m^2+2\lambda m+\omega^2=0$$

Cuyas raíces son:

$$m_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2} \qquad m_2=-\lambda-*\sqrt{\lambda^2-\omega^2}$$

Por lo tanto:

a). λ^2 – ω^2 > 0

En este caso el sistema está sobreamortiguado, porque el coeficiente de amortiguamiento β *es grande comparado con la constante de resorte* k.

Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, por lo que la solución correspondiente es:

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}+c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right)$$

Esta ecuación representa un movimiento uniforme y no oscilatorio.

b). λ^2 – ω^2 = 0

En este caso el sistema está críticamente amortiguado, porque cualquier ligera disminución en la fuerza de amortiguamiento daría como resultado un movimiento oscilatorio.

Las raíces de la ecuación característica son reales y repetidas, por lo que la solución correspondiente es:

$$x(t)=e^{-\lambda t}(c_1+c_2t)$$

c). λ^2 – ω^2 < 0

En este caso el sistema está subamortiguado puesto que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte.

Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, por lo que la solución correspondiente es:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right)$$

Esta ecuación representa un movimiento oscilatorio, pero debido al coeficiente$e^{-\lambda t}$ *las amplitudes de vibración disminuyen al aumentar el tiempo.*