Universidad de San Carlos
Facultad de Ingeniería

09/11/11

Departamento de Matemática
Matemática Aplicada 2N

Examen Final

Temario **E**

Prof. *José Saquimux*
Aux. *José Márquez*

TEMA 1. SOLUCION DE UNA ED UTILIZANDO EL PAR TRANSFORMADO DE FOURIER

La ecuación diferencial que gobierna la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito serie RC cuando se le aplica una tensión $v(t)$ es

$$Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

Si la tensión aplicada es $v(t) = Ve^{-t/RC}H(t)$, usando transformada de Fourier y formulario de transformada inversa determine la carga en el capacitor en función del tiempo y esboce su gráfica.

SOLUCION

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}\left[Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = Ve^{-t/RC}H(t)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[Rq'(t) + \frac{q(t)}{C}\right] = \mathcal{F}\left[Ve^{-t/RC}H(t)\right]$$

*Aplicando la propiedad de **linealidad** de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot \mathcal{F}[q'(t)] + \frac{1}{C}\mathcal{F}[q(t)] = V \cdot \mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right]$$

Sea $Q(\omega) = \mathcal{F}[q(t)]$

*Aplicando la propiedad de **diferenciación en el tiempo** de la transformada de Fourier:*

$$R \cdot j\omega Q(\omega) + \frac{1}{C}Q(\omega) = V \cdot \mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right]$$

Ahora, determinar la transformada de Fourier, se puede por definición o por formulario:

$$\mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/RC}H(t) \cdot e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{(1/RC + j\omega)}$$

Por medio de la definición, utilizamos el escalón unitario de Heaviside que se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right] = 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-t/RC} \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1/RC + j\omega)t}\,dt$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right] = \frac{1}{-(1/RC + j\omega)}\left[e^{-(1/RC+j\omega)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{-(1/RC + j\omega)}(0 - 1)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}\left[e^{-t/RC}H(t)\right] = \frac{1}{(1/RC + j\omega)}}$$

Sustituyendo la trasformada en la ecuación diferencial:

$$R \cdot j\omega Q(\omega) + \frac{1}{C} Q(\omega) = V \cdot \frac{1}{(1/RC + j\omega)}$$

$$Q(\omega)\left(j\omega R + \frac{1}{C}\right) = V \cdot \frac{1}{(1/RC + j\omega)}$$

$$Q(\omega)(1/RC + j\omega)R = V \cdot \frac{1}{(1/RC + j\omega)}$$

$$\boldsymbol{Q(\omega) = \frac{V}{R} \cdot \frac{1}{(1/RC + j\omega)^2}}$$

De la tabla de Pares transformados de Fourier, se utiliza:

$$\mathcal{F}[t \cdot e^{-at} \cdot H(t)] = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(a + j\omega)^2}\right] = t \cdot e^{-at} \cdot H(t)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a cada lado de la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}[Q(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{V}{R} \cdot \frac{1}{(1/RC + j\omega)^2}\right]$$

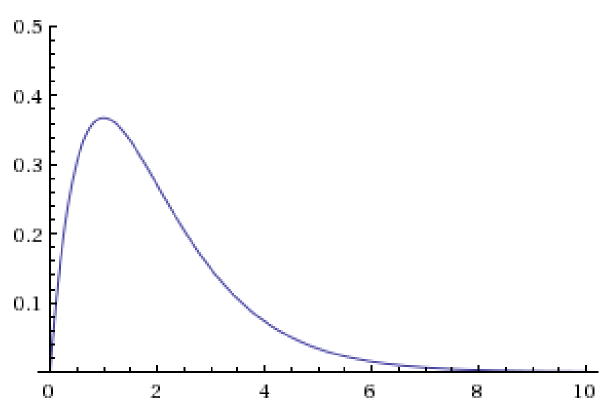
Aplicando propiedades:

$$q(t) = \frac{V}{R} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(1/RC + j\omega)^2}\right]$$

Entonces por formulario:

$$\boldsymbol{q(t) = \frac{V}{R} \cdot t \cdot e^{-t/RC} \cdot H(t)}$$

La gráfica para $V = R = C = 1$ *es;*

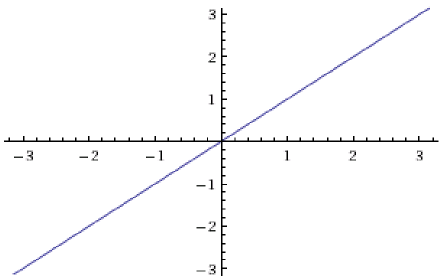


TEMA 2. SERIE DE FOURIER

Calcule la serie compleja de Fourier de la tensión periódica diente de sierra impar

$$v(\omega t) = \omega t, \quad volts \quad -\pi < \omega t < \pi$$

SOLUCION



Período: $T = 2\pi$

Debido a que la forma de onda posee únicamente simetría impar, $\boldsymbol{V_0 = 0}$

La serie compleja de Fourier:

$$v(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \cdot e^{jn\omega t}$$

Coeficientes complejos:

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\omega t) \cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega t \cdot e^{-jn\omega t}\, d\omega t = \frac{-1}{2\pi(jn)^2}\left[e^{-jn\omega t}(jn\omega t + 1)\right]_{\omega t=-\pi}^{\pi}$$

$$V_n = \frac{-1}{2\pi(j)^2 n^2}\left[e^{-jn\pi}(jn\pi + 1) - e^{jn\pi}(-jn\pi + 1)\right]$$

$$V_n = \frac{-1}{2\pi(-1)n^2}\left[e^{-jn\pi}jn\pi + e^{-jn\pi} + e^{jn\pi}jn\pi - e^{jn\pi}\right]$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi n^2}\left[j\pi n\left(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}\right) - \left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right)\right]$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi n^2}\left[j2\pi n\left(\frac{e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}}{2}\right) - 2j\left(\frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{2j}\right)\right]$$

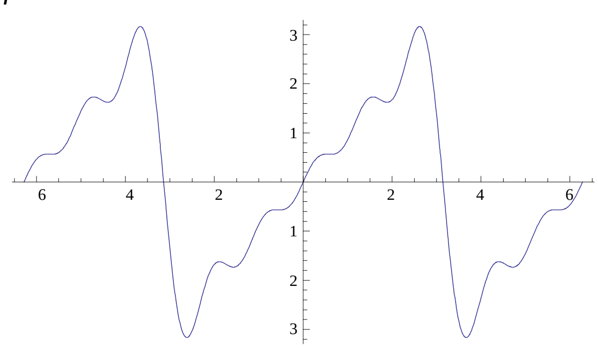
$$V_n = \frac{1}{2\pi n^2}\left[j2\pi n\cos(n\pi) - 2j\sin(n\pi)\right] = \frac{2j}{2\pi n^2}\left[\pi n(-1)^n - 0\right] = \frac{j\pi n(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$\boldsymbol{V_n = j\frac{(-1)^n}{n}}$$

La serie compleja queda:

$$\boldsymbol{v(\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\frac{(-1)^n}{n} \cdot e^{jn\omega t} \qquad para\ n \neq 0}$$

Para verificar, su grafica para $-5 < n < 5$ *es:*



TEMA 3. DERIVADA DE UNA SERIE DE FOURIER

La corriente en la bobina de autoinducción $L = 0.1$ henrios está dada por la serie trigonométrica de Fourier

$$i(t) = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)$$

Determine la tensión en sus bornes y grafique el espectro de amplitud hasta la séptima armónica.

SOLUCION

La ecuación de la tensión en una inductancia se denota como:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

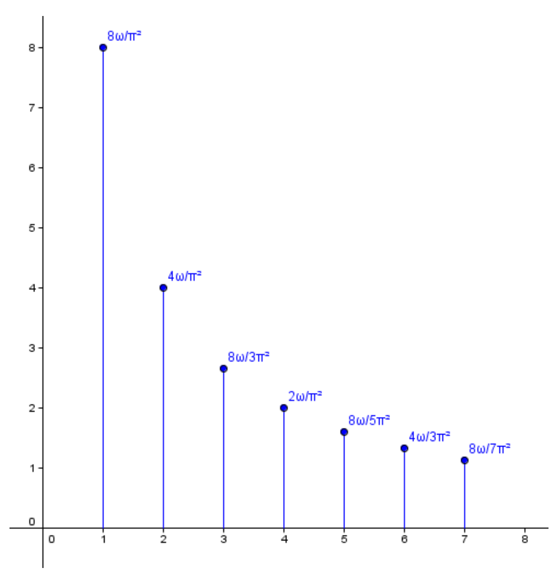
$$v(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)\right] = 0.1\cdot\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d}{dt}[\cos(n\omega t)]$$

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[-n\omega\sin(n\omega t)] = \frac{-8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega}{n}\sin(n\omega t)$$

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{-8\omega}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{-8\omega}{\pi^2 n}} \qquad \boldsymbol{|b_n| = \frac{8\omega}{\pi^2 n}}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert b_n\rvert$	$\frac{8\omega}{\pi^2}$	$\frac{4\omega}{\pi^2}$	$\frac{8\omega}{3\pi^2}$	$\frac{2\omega}{\pi^2}$	$\frac{8\omega}{5\pi^2}$	$\frac{4\omega}{3\pi^2}$	$\frac{8\omega}{7\pi^2}$



TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Se sabe que la transformada de un producto de dos funciones es igual a la convolucion de sus transformadas. Esto es, si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ y $\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$ entonces la transformada del producto $f(t)g(t)$ se puede calcular con la integral de convolución,

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}G(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x)\,dx$$

Aplique esta fórmula para calcular la trasformada del producto: $e^{-a|t|}\cos(t)$, $\quad a > 0$. Denote $f(t) = e^{-a|t|}$ y $g(t) = \cos(t)$, use su formulario para determinar sus transformadas, sustitúyalas en la integral de convolución y use la propiedad de muestreo de la funcion delta para evaluar la integral resultante.

SOLUCION

De la tabla de transformadas de Fourier:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$
$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[\cos(t)] = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)\,]$$

Sustituyendo en la integral de convolucion:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x)\,dx$$

Entonces:

$$G(x) = \pi[\delta(x + 1) + \delta(x - 1)]$$
$$F(\omega - x) = \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi[\delta(x + 1) + \delta(x - 1)\,] \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx + \frac{\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

Ahora, la función impulso unitario trasladado se define como:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

La propiedad de muestreo de la función impulso unitario:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot h(x)\,dx = h(x_0)$$

*Aplicando, la propiedad de **muestreo** de la funcion impulso unitario:*

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\right]_{x=-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\right]_{x=1}$$

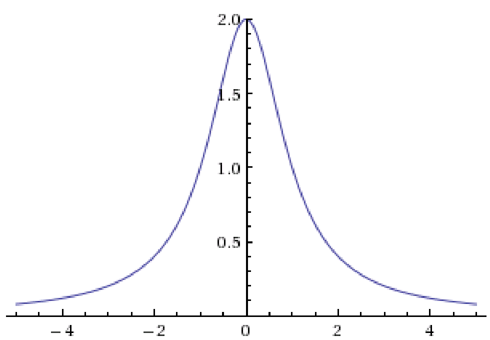
$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(\omega + 1)^2 + a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(\omega - 1)^2 + a^2}$$

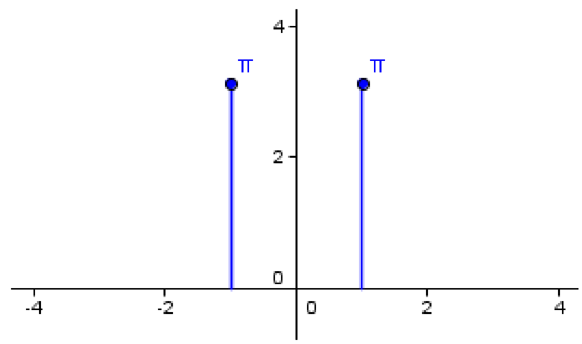
$$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{a}{(\omega + 1)^2 + a^2} + \frac{a}{(\omega - 1)^2 + a^2}}$$

Con fines de enseñanza, se muestran las gráficas para $a = 1$

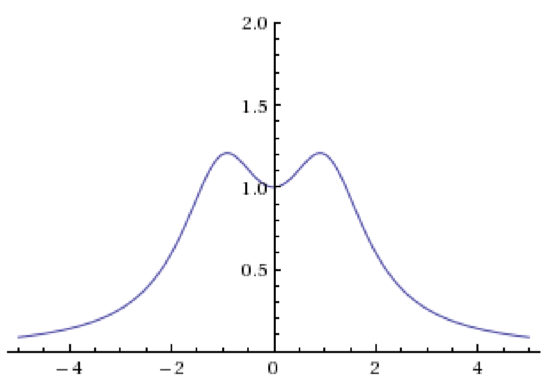
$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

$$G(\omega) = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$$





$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{(\omega + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\omega - 1)^2 + 1}$$



Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *09/11/11* *Matemática Aplicada 2N*

Examen Final

Temario **O**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. SOLUCION DE UNA ED UTILIZANDO EL PAR TRANSFORMADO DE FOURIER

Para determinar la temperatura $T(t)$ en el interior de una placa cuando se le aplica en una cara un flujo de calor decreciente $Q(t) = Q_0 e^{-mt} H(t)$ Btu/h-pie^2, mientras que en la otra cara se disipa calor por convección a temperatura uniforme T_∞, se plantea la ecuación diferencial,

$$\theta'(t) + m\theta(t) = Q_0 e^{-mt} H(t)$$

(m es una constante positiva que depende de cantidades físico-térmicas de la placa)
Resuelva esta ecuación diferencial usando transformada de Fourier y formulario de transformada inversa, luego usando $T(t) = \theta(t) + T_\infty$ ºF determine la temperatura $T(t)$ en función del tiempo y esboce su gráfica.

SOLUCION

Aplicar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial:

$$\mathcal{F}[\theta'(t) + m\theta(t) = Q_0 e^{-mt} H(t)]$$
$$\mathcal{F}[\theta'(t) + m\theta(t)] = \mathcal{F}[Q_0 e^{-mt} H(t)]$$

Aplicando la propiedad de ***linealidad*** *de la transformada de Fourier:*

$$\mathcal{F}[\theta'(t)] + m \cdot \mathcal{F}[\theta(t)] = Q_0 \cdot \mathcal{F}[e^{-mt} H(t)]$$

Sea $\Theta(\omega) = \mathcal{F}[\theta(t)]$
Aplicando la propiedad de ***diferenciación en el tiempo***:

$$\mathrm{j}\omega \cdot \Theta(\omega) + m \cdot \Theta(\omega) = Q_0 \cdot \mathcal{F}[e^{-mt} H(t)]$$

Ahora, determinar la transformada de Fourier, se puede por definición o por formulario:

$$\mathcal{F}[e^{-mt} H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mt} H(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{(m + j\omega)}$$

Por medio de la definición, utilizamos el escalón unitario de Heaviside que se define como:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathcal{F}[e^{-mt} H(t)] = 0 + \int_0^{\infty} e^{-mt} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(m+j\omega)t}\, dt$$
$$\mathcal{F}[e^{-mt} H(t)] = \frac{1}{-(m + j\omega)} \left[e^{-(m+j\omega)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{-(m + j\omega)}(0 - 1)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[e^{-mt} H(t)] = \frac{1}{(m + j\omega)}}$$

Sustituyendo la trasformada en la ecuación diferencial:

$$j\omega \cdot \Theta(\omega) + m \cdot \Theta(\omega) = Q_0 \cdot \frac{1}{(m + j\omega)}$$

$$\Theta(\omega) \cdot (m + j\omega) = Q_0 \cdot \frac{1}{(m + j\omega)}$$

$$\boldsymbol{\Theta(\omega) = Q_0 \cdot \frac{1}{(m + j\omega)^2}}$$

De la tabla de Pares transformados de Fourier, se utiliza:

$$\mathcal{F}[t \cdot e^{-at} \cdot H(t)] = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(a + j\omega)^2}\right] = t \cdot e^{-at} \cdot H(t)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier a cada lado de la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}[\Theta(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[Q_0 \cdot \frac{1}{(m + j\omega)^2}\right]$$

Aplicando propiedades:

$$\theta(t) = Q_0 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(m + j\omega)^2}\right]$$

Entonces por formulario:

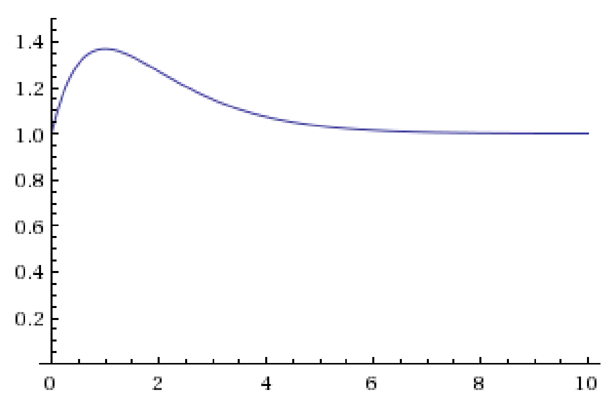
$$\boldsymbol{\theta(t) = Q_0 \cdot t \cdot e^{-mt} \cdot H(t)}$$

La temperatura queda:

$$T(t) = \theta(t) + T_\infty \quad ºF$$

$$\boldsymbol{T(t) = Q_0 \cdot t \cdot e^{-mt} \cdot H(t) + T_\infty \qquad ºF}$$

La gráfica para $Q_0 = m = T_\infty = 1$ *es;*

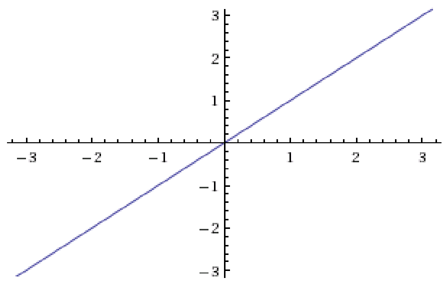


TEMA 2. SERIE DE FOURIER

Calcule la serie trigonométrica de Fourier del suministro de calor periódico impar,

$$q(\omega t) = \omega t, \quad Btu/h \cdot pie^2, \quad -\pi < \omega t < \pi$$

SOLUCION



Período: $T = 2\pi$

Debido a que la forma de onda posee únicamente simetría impar, contendrá únicamente coeficientes de $\sin(n\omega t)$ *para todo valor de* n.

$$v(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \left[\frac{a_0}{2} = 0, \qquad a_n = 0\right]$$

Coeficientes del seno:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\omega t)\sin(n\omega t)\, d\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \omega t \sin(n\omega t)\, d\omega t = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot[\sin(n\omega t) - n\omega t\cos(n\omega t)]_{\omega t=0}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n^2\pi}\cdot[\sin(n\pi) - n\pi\cos(n\pi) - \sin(0) + n(0)\cos(0)]$$

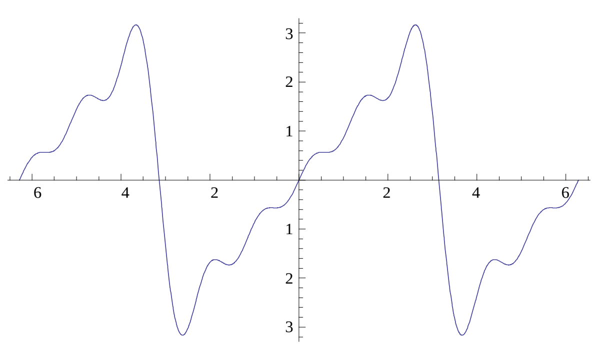
$$b_n = \frac{2}{n^2\pi}\cdot[0 - n\pi(-1)^n - 0 + 0] = \frac{-2n\pi(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

La serie trigonométrica queda:

$$\boldsymbol{v(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin(n\omega t)}$$

Para verificar, su grafica para $1 < n < 5$ *es:*



TEMA 3. DERIVADA DE UNA SERIE DE FOURIER

Para la función periódica $f(t)$

$$f(t) = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)$$

Determine $f'(t)$ y grafique el espectro de amplitud hasta la séptima armónica.

SOLUCION

La ecuación de la tensión en una inductancia se denota como:

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

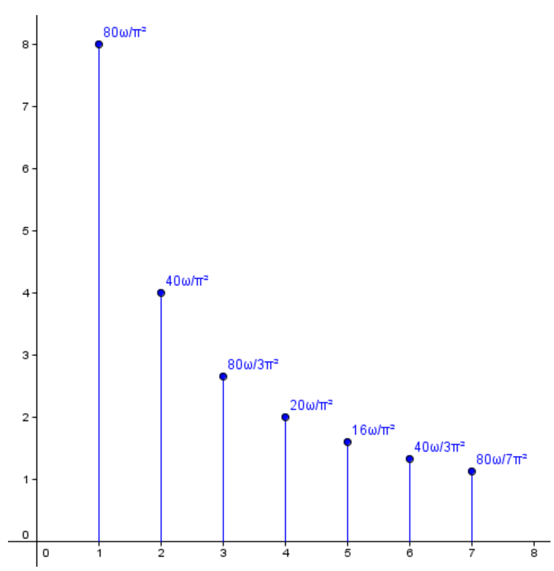
$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)\right] = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d}{dt}[\cos(n\omega t)]$$

$$f'(t) = \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[-n\omega\sin(n\omega t)] = \frac{-80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega}{n}\sin(n\omega t)$$

$$\boldsymbol{f'(t) = \frac{-80\omega}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{-80\omega}{\pi^2 n}} \qquad \boldsymbol{|b_n| = \frac{80\omega}{\pi^2 n}}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert b_n \rvert$	$\frac{80\omega}{\pi^2}$	$\frac{40\omega}{\pi^2}$	$\frac{80\omega}{3\pi^2}$	$\frac{20\omega}{\pi^2}$	$\frac{16\omega}{\pi^2}$	$\frac{40\omega}{3\pi^2}$	$\frac{80\omega}{7\pi^2}$



TEMA 4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

Se sabe que la transformada de un producto de dos funciones es igual a la convolucion de sus transformadas. Esto es, si $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ y $\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$ entonces la transformada del producto $f(t)g(t)$ se puede calcular con la integral de convolución,

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x)\,dx$$

Aplique esta fórmula para calcular la trasformada del producto: $e^{-a|t|}\cos(t)$, $a > 0$. Denote $f(t) = e^{-a|t|}$ y $g(t) = \cos(t)$, use su formulario para determinar sus transformadas, sustitúyalas en la integral de convolución y use la propiedad de muestreo de la funcion delta para evaluar la integral resultante.

SOLUCION

De la tabla de transformadas de Fourier:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[\cos(t)] = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)\,]$$

Sustituyendo en la integral de convolucion:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)F(\omega - x)\,dx$$

Entonces:

$$G(x) = \pi[\delta(x + 1) + \delta(x - 1)\,]$$

$$F(\omega - x) = \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}$$

Sustituyendo:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi[\delta(x + 1) + \delta(x - 1)\,] \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx + \frac{\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) \cdot \frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\,dx$$

Ahora, la función impulso unitario trasladado se define como:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

La propiedad de muestreo de la función impulso unitario:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot h(x)\,dx = h(x_0)$$

Aplicando, la propiedad de ***muestreo*** *de la funcion impulso unitario:*

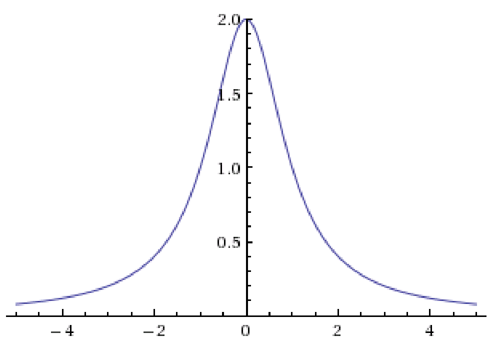
$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\right]_{x=-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(\omega - x)^2 + a^2}\right]_{x=1}$$

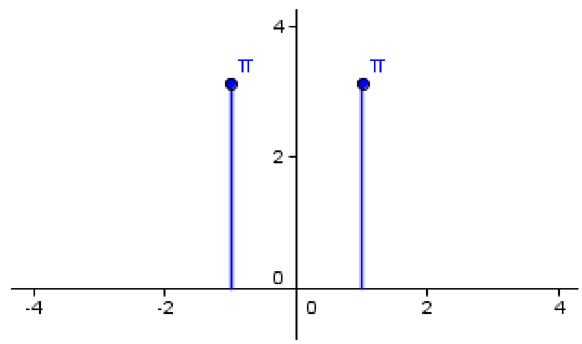
$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(\omega + 1)^2 + a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{(\omega - 1)^2 + a^2}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{a}{(\omega + 1)^2 + a^2} + \frac{a}{(\omega - 1)^2 + a^2}}$$

Con fines de enseñanza, se muestran las gráficas para $a = 1$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} \qquad\qquad G(\omega) = \pi[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$$





$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{(\omega + 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\omega - 1)^2 + 1}$$