Universidad de San Carlos *Departamento de Matemática*
Facultad de Ingeniería *10/11/11* *Matemática Aplicada 5N*

Examen Final

Temario **A**

Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

TEMA 1. INTEGRALES COMPLEJAS

Calcule cada una de las integrales (deje procedimiento a mano)

$$a)\ \int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt\ , \qquad b)\ \int_{C} (\overline{z}+i)\, dz\ , \quad C: segmento\ que\ une\ (0,0)\ y\ (2,3)$$

$$c)\ \int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} e^{-2z}\, dz\ , \qquad d)\ \oint_{C} \left(i+\frac{1}{z}\right) dz\ , \quad \begin{matrix} C: circunferencia\ |z|=2 \\ (separe\ en\ dos\ integrales\ y\ use\ polares) \end{matrix}$$

SOLUCION

a)

$$\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} \left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right) e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2i}\int_{-a}^{a} \left(1-e^{-2i\omega t}\right) dt$$

$$\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2i}\left[t-\frac{1}{-2i\omega}e^{-2i\omega t}\right]_{t=-a}^{a} = \frac{1}{2i(2i\omega)}\left[2i\omega t+e^{-2i\omega t}\right]_{t=-a}^{a}$$

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{4i^2\omega}\left[2i\omega a+e^{-2i\omega a}+2i\omega a-e^{2i\omega a}\right]}, \textcolor{red}{\boldsymbol{(aqui\ ya\ esta\ bien)}}$$

$$\boldsymbol{\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{-1}{4\omega}\left[4i\omega a-e^{2i\omega a}+e^{-2i\omega a}\right] = \frac{-1}{4\omega}\left[4i\omega a-2i\left(\frac{e^{2i\omega a}-e^{-2i\omega a}}{2i}\right)\right]}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{-1}{4\omega}\left[4i\omega a-2i\sin(2\omega a)\right] = -ia+\frac{1}{2\omega}i\sin(2\omega a)$$

$$\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = i\cdot\left(\frac{\sin(2\omega a)}{2\omega}-a\right) = i\cdot\left(\frac{2\sin(\omega a)\cos(\omega a)}{2\omega}-a\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_{-a}^{a} \sin(\omega t)\, e^{-i\omega t}\, dt = i\cdot\left(\frac{\sin(\omega a)\cos(\omega a)-\omega a}{\omega}\right)}}$$

b)

$$\int_{C} (\overline{z}+i)\, dz\ , \quad C: segmento\ que\ une\ (0,0)\ y\ (2,3)$$

$$\int_{C} (\overline{z}+i)\, dz = \int_{C} \left(\overline{(x+iy)}+i\right)(dx+idy) = \int_{C} (x-iy+i)(dx+idy)$$

$$\int_{C} (\overline{z}+i)\, dz = \int_{C} \left(x+i(1-y)\right)(dx+idy)$$

$$\int_{C} (\overline{z}+i)\, dz = \int_{C} xdx-(1-y)dy+i\int_{C} (1-y)dx+xdy$$

La recta que une (0,0) y (2,3) esta expresada: $y = \frac{3}{2}x$

Sustituyendo con:

$$y = \frac{3}{2}x \quad , \quad dy = \frac{3}{2}dx \quad , \quad para\ 0 \le x \le 2$$

Entonces:

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)} (\overline{z} + i)\, dz = \int_{x=0}^{2} xdx - (1 - \frac{3}{2}x)\frac{3}{2}dx + i\int_{x=0}^{2} \left(1 - \frac{3}{2}x\right)dx + x\frac{3}{2}dx$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)} (\overline{z} + i)\, dz = \int_{x=0}^{2} \left(\frac{13}{4}x - \frac{3}{2}\right)dx + i\int_{x=0}^{2} (1)dx$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)} (\overline{z} + i)\, dz = \left[\frac{13}{8}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{x=0}^{2} + i[x]_{x=0}^{2} = \left[\frac{13}{8}(2)^2 - \frac{3}{2}2 - 0 + 0\right] + i[2 - 0]$$

$$\boldsymbol{\int_{(0,0)}^{(2,3)} (\overline{z} + i)\, dz = \frac{7}{2} + 2i}$$

c)

$$\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} e^{-2z}\, dz = \frac{1}{-2}\left[e^{-2z}\right]_{z=1-\pi i}^{2+3\pi i} = \frac{-1}{2}\left[e^{-2(2+3\pi i)} - e^{-2(1-\pi i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-2+2\pi i} - e^{-4-6\pi i}\right]$$

$$\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} e^{-2z}\, dz = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left[\boldsymbol{e^{-2}e^{2\pi i} - e^{-4}e^{-6\pi i}}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-2}(1) - e^{-4}(1)\right] = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4})$$

$$\boldsymbol{\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} e^{-2z}\, dz = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4}) \approx 0.0585}$$

d)

$$\oint_C \left(i + \frac{1}{z}\right)dz \;, \qquad C: circunferencia\ |z| = 2 \quad (separe\ en\ dos\ integrales\ y\ use\ polares)$$

$$\oint_C \left(i + \frac{1}{z}\right)dz = \oint_C (i)\, dz + \oint_C \frac{1}{z}dz \qquad En\ polares\ \ z = re^{j\theta}$$

Un punto sobre la circunferencia $|z| = 2$ *esta expresado como:* $z = 2e^{j\theta}$

Sustituyendo con:

$$z = 2e^{i\theta} \quad , \quad dz = 2ie^{i\theta}d\theta \quad , \quad para\ 0 \le \theta < 2\pi$$

Entonces:

$$\oint_{|z|=2} \left(i + \frac{1}{z}\right)dz = i\int_{\theta=0}^{2\pi} 2ie^{i\theta}\, d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{2ie^{i\theta}}{2e^{i\theta}}d\theta = -2\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i\theta}\, d\theta + i\int_{\theta=0}^{2\pi} 1\, d\theta$$

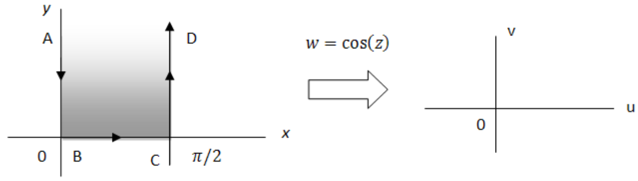
$$\oint_{|z|=2} \left(i + \frac{1}{z}\right)dz = -\frac{2}{i}\left[e^{i\theta}\right]_{\theta=0}^{2\pi} + i[\theta]_{\theta=0}^{2\pi} = 2i\left[e^{i2\pi} - 1\right] + i[2\pi - 0]$$

$$\oint_{|z|=2} \left(i + \frac{1}{z}\right)dz = 2i(1 - 1) + i2\pi = 0 + i2\pi = i2\pi$$

$$\boldsymbol{\oint_{|z|=2} \left(i + \frac{1}{z}\right)dz = i2\pi}$$

TEMA 2. TRANSFORMACIONES COMPLEJAS

a) Determine las imágenes de la semirecta AB, el segmento BC y la semirecta CD que limita la franja infinita de la figura bajo la función: $w = \cos(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$



b) Determine y dibuje la imagen del rectángulo limitado por $1 \le x \le 2$ y $\pi/4 \le y \le 3\pi/4$ bajo la función: $w = \overline{e^z}$ (opere con la exponencial y tome el conjugado)

SOLUCION

a)

Transformación de la semirecta AB: $x = 0 \;,\quad z_{AB} = iy \;,\quad 0 \le y < \infty$

$$w_{AB} = \cos(z_{AB}) = \cos(iy) = \cos(0)\cosh y - i\sin(0)\sinh y = \cosh y - 0$$

$$\boldsymbol{w_{AB}(0,y) = \cosh y} \;,\quad \lim_{y\to\infty} \boldsymbol{w_{AB}(0,y)} = \infty \;,\quad \boldsymbol{w_{AB}(0,0) = 1}$$

Transformación de la segmento BC: $y = 0 \;,\quad z_{BC} = x \;,\quad 0 \le x \le \pi/2$

$$w_{BC} = \cos(z_{BC}) = \cos(x) = \cos x \cosh(0) - i \sin x \sinh(0) = \cos x - 0$$

$$\boldsymbol{w_{BC}(x,0) = \cos x} \;,\quad \boldsymbol{w_{BC}(0,0) = 1} \;,\quad \boldsymbol{w_{BC}(\pi/2,0) = 0}$$

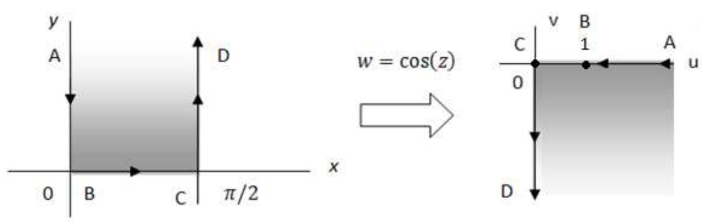
Transformación de la semirecta CD: $x = \pi/2 \;,\quad z_{CD} = iy \;,\quad 0 \le y < \infty$

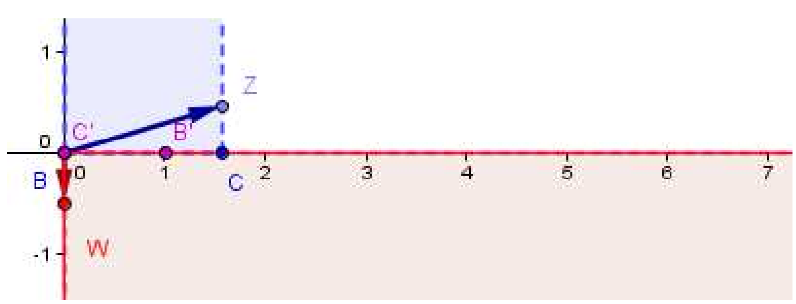
$$w_{CD} = \cos(z_{CD}) = \cos(\pi/2 + iy) = \cos(\pi/2)\cosh y - i\sin(\pi/2)\sinh y = 0 - i\sinh y$$

$$\boldsymbol{w_{CD}(\pi/2,y) = -i\sinh y} \;,\quad \boldsymbol{w_{CD}(\pi/2,0) = 0} \quad \lim_{y\to\infty} \boldsymbol{w_{CD}(\pi/2,y) = -i\infty}$$

Puntos transformados:

$$\boldsymbol{w(0,\infty) = \infty \quad w(0,0) = 1 \quad w(\pi/2,0) = 0 \quad w(2,1) = -i\infty}$$





b)

Transformación:

$$w = \overline{e^{z}} = \overline{e^{x+iy}} = e^{x} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{x} \cdot \overline{(\cos y + i \sin y)} = e^{x} \cdot (\cos y - i \sin y)$$

$$\boldsymbol{w(x,y) = e^{x} \cos y - ie^{x} \sin y}$$

$$1 \leq x \leq 2$$
$$\pi/4 \leq y \leq 3\pi/4$$

Ecuaciones de las rectas transformadas:

$$w(1,y) = e^{1} \cos y - ie^{1} \sin y$$
$$u = e \cos y \qquad v = -e \sin y$$
$$u^2 = e^2(\cos y)^2 \qquad v^2 = e^2(\sin y)^2$$
$$u^2 + v^2 = e^2(\cos y)^2 + e^2(\sin y)^2$$
$$\boldsymbol{u^2 + v^2 = e^2}$$

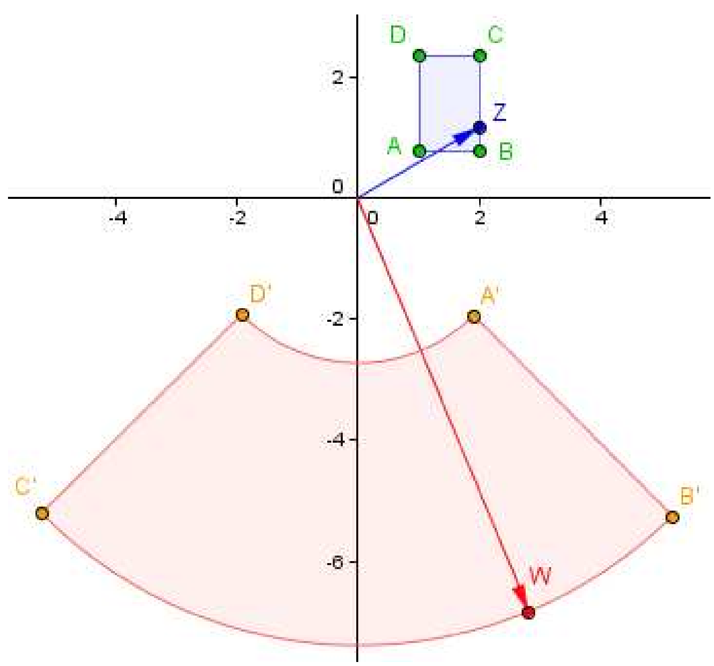
$$w(x, \pi/4) = e^{x} \cos \pi/4 - ie^{x} \sin \pi/4$$
$$u = e^{x}/\sqrt{2} \qquad v = -e^{x}/\sqrt{2}$$
$$u = e^{x}/\sqrt{2} \qquad -v = e^{x}/\sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{u = -v}$$

$$w(2,y) = e^{2} \cos y - ie^{2} \sin y$$
$$u = e^2 \cos y \qquad v = -e^2 \sin y$$
$$u^2 = e^4(\cos y)^2 \qquad v^2 = e^4(\sin y)^2$$
$$u^2 + v^2 = e^4(\cos y)^2 + e^4(\sin y)^2$$
$$\boldsymbol{u^2 + v^2 = e^4}$$

$$w(x, 3\pi/4) = e^{x} \cos 3\pi/4 - ie^{x} \sin 3\pi/4$$
$$u = -\frac{e^{x}}{\sqrt{2}} \qquad v = -\frac{e^{x}}{\sqrt{2}}$$
$$\boldsymbol{u = v}$$

Puntos transformados:

$$\boldsymbol{w\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e}{\sqrt{2}} - i\frac{e}{\sqrt{2}}, \quad w\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} - i\frac{e^2}{\sqrt{2}},}$$
$$\boldsymbol{w\left(1, \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{e}{\sqrt{2}} - i\frac{e}{\sqrt{2}}, \quad w\left(2, \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{e^2}{\sqrt{2}} - i\frac{e^2}{\sqrt{2}}}$$



TEMA 3. FUNCIONES COMPLEJAS

a) Determine la parte real e imaginaria de $\log(z+z^2)$

b) Calcule

$$\operatorname{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]$$

c) Determine la región del plano donde la función dada es analítica, si existe, y cuál es su derivada en esa región

$$f(z)=|z|^2+i(x^2-y^2)$$

SOLUCION

a)

$$w=\log(z+z^2)$$
$$10^w=z+z^2$$
$$\ln(10^w)=\ln(z+z^2)$$
$$w\ln(10)=\ln(z+z^2)$$
$$w=\frac{\ln(z+z^2)}{\ln(10)}$$

Sustituyendo z en polares:

$$z+z^2=re^{i\theta}$$
$$z+z^2=x+iy+(x+iy)^2=x+iy+x^2-y^2+i2xy=(x^2+x-y^2)+i(2xy+y)$$

$$r=|z+z^2|=\sqrt{(x^2+x-y^2)^2+(2xy+y)^2}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2xy+y}{x^2+x-y^2}\right)$$

$$w=\frac{1}{\ln(10)}\ln(z+z^2)=\frac{1}{\ln(10)}\ln\left(re^{i\theta}\right)$$

$$w=\frac{1}{\ln(10)}[\ln(r)+i\theta]=\frac{\ln(r)}{\ln(10)}+i\frac{\theta}{\ln(10)}$$

$$\boldsymbol{w=\frac{\ln\left(\sqrt{(x^2+x-y^2)^2+(2xy+y)^2}\right)}{\ln(10)}+i\frac{1}{\ln(10)}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{2xy+y}{x^2+x-y^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{Re}[\log(z+z^2)]=\frac{\ln\left(\sqrt{(x^2+x-y^2)^2+(2xy+y)^2}\right)}{\ln(10)}}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{Im}[\log(z+z^2)]=\frac{1}{\ln(10)}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{2xy+y}{x^2+x-y^2}\right)}$$

(si lo tomaron como logaritmo natural esta bien)

b)

$$\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]=\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{(z+ia)(z-ia)}{z-ia}\right)e^{zt}\right]$$

$$\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]=\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}(z+ia)e^{zt}\right]=\text{Re}\left[(ia+ia)e^{iat}\right]$$

$$\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]=\text{Re}[2ia(\cos(at)+i\sin(at))]=\text{Re}[2ia\cos(at)-2a\sin(at)]$$

$$\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]=\text{Re}[-2a\sin(at)+i2a\cos(at)]$$

$$\boldsymbol{\text{Re}\left[\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2+a^2}{z-ia}\right)e^{zt}\right]=-2a\sin(at)}$$

(pueden usar L'Hospital, también)

c)

$$f(z)=|z|^2+i(x^2-y^2)$$

$$u=|z|^2=x^2+y^2 \qquad v=x^2-y^2$$
$$u_x=2x \quad u_y=2y \qquad v_x=2x \quad v_y=-2y$$

Para que f(z) sea analítica, las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ deben cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y ser continuas en la región:

$$u_x=v_y \qquad -u_y=v_x$$
$$2x=-2y \qquad -2y=2x$$

Entonces la región, donde se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es la recta:

$$\boldsymbol{y=-x}$$

La derivada sobre la curva:

$$f'(z)=u_x+iv_x=2x+i2x=2x(1+i)$$

También puede ser:

$$f'(z)=v_y-iu_y=-2y-i2y=-2y(1+i)$$

Entonces:

$$\boldsymbol{f'(z)=2x(1+i)=-2y(1+i) \qquad \textit{sobre la curva} \quad y=-x}$$

(Como solo existe derivada sobre la recta, $f(z)$ NO es analítica en ningún punto, pues hay derivada en un punto sobre la recta pero no hay derivada en cualquier entorno alrededor de dicho punto)

TEMA 4. APLICACIÓN: CIRCUITOS ELÉCTRICOS

a) Determinar el módulo de la admitancia Y

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

b) A un circuito serie RLC se le aplica tensión compleja $V = V_m e^{j\omega t}$ determine la **corriente compleja** producida por dicha tensión

SOLUCION

a)

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

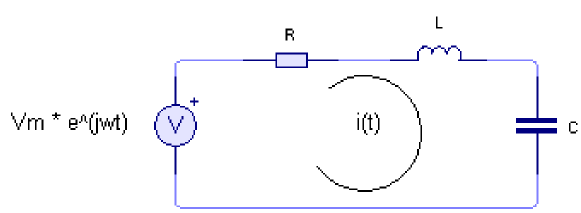
$$|Y| = \left| j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \right| = \left| \frac{j\omega C(R + j\omega L) + 1}{R + j\omega L} \right| = \left| \frac{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}{R + j\omega L} \right|$$

$$|Y| = \left| \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} \right| = \frac{|1 - \omega^2 LC + j\omega RC|}{|R + j\omega L|} = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\boldsymbol{|Y| = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}{R^2 + (\omega L)^2}}}$$

b)

Un circuito serie RLC, con tensión compleja $V = V_m e^{j\omega t}$



Por método de impedancia compleja:

$$I = V/Z$$

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}\right)}$$

Entonces:

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V_m e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)}}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j\omega t-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)}$$

$$\boldsymbol{I=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j\left[\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)\right]}}$$

Por método de ecuaciones diferenciales:

$$v_R=Ri=2i\quad,\quad v_L=L\frac{di}{dt}=\frac{1}{50}\frac{di}{dt}\quad,\quad v_c=\frac{1}{C}\int i\,dt$$

Por ley de voltajes de Kirchhoff:

$$V_m e^{j\omega t}=v_R+v_L+v_c=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int I(x)\,dx$$

Para resolver la ED, se utiliza el método de coeficientes constantes indeterminados. Dado que la entrada tiene la forma de exponencial compleja, suponemos que la salida posee también la forma de exponencial compleja:

$$I=Ae^{j\omega t}\quad,\quad\frac{dI(t)}{dt}=j\omega Ae^{j\omega t}\quad,\quad\int I(x)\,dx=\frac{Ae^{j\omega t}}{j\omega}$$

Sustituyendo y determinando la constante:

$$V_m e^{j\omega t}=RAe^{j\omega t}+Lj\omega Ae^{j\omega t}+\frac{1}{C}\frac{Ae^{j\omega t}}{j\omega}$$

$$V_m=RA+j\omega LA+\frac{A}{j\omega C}$$

$$V_m=A\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$A=\frac{V_m}{\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)}=\frac{V_m}{\left(R+j\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)\right)}=\frac{V_m}{\left(\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)}\right)}$$

Entonces la corriente es:

$$I=Ae^{j\omega t}=\frac{V_m e^{j\omega t}}{\left(\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)}\right)}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j\omega t-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)}$$

$$\boldsymbol{I=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j\left[\omega t-\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2LC-1}{\omega CR}\right)\right]}}$$