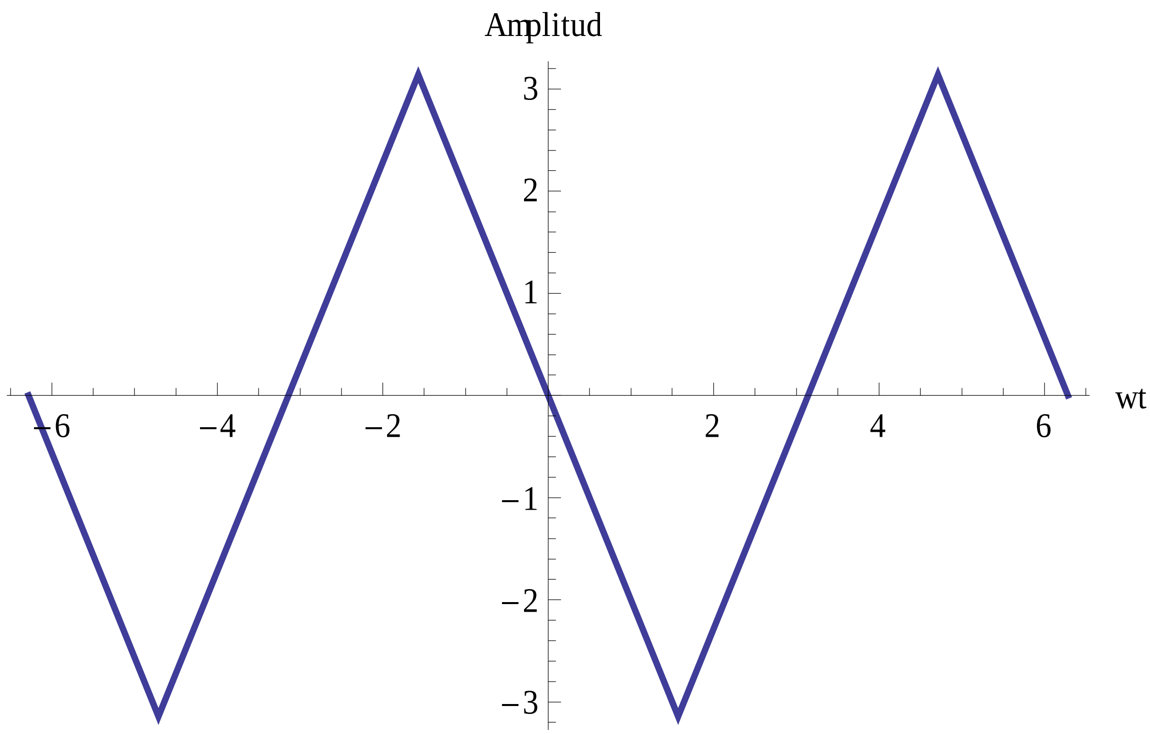
*Universidad de San Carlos* *Departamento de Matemática*
*Facultad de Ingeniería* *06/02/2012* *Matemática Aplicada 2N*
Prof. *José Saquimux* Aux. *José Márquez*

***Ejercicio Resuelto***
***Serie Trigonométrica de Fourier en MATHEMATICA 7***
***CUANDO EL PERÍODO ES $2\pi$***

Se tiene la siguiente forma de onda, (señal triangular):




Determine lo siguiente:

a) Período (T)
b) Función por partes (desde **-T/2** hasta **T/2**)
c) Tipo de Simetría y coeficientes existentes
d) Coeficientes por integrales
e) Serie Trigonométrica de Fourier

En MATHEMATICA, determine:

f) Construya la función utilizando la función **UnitStep** (desde **-T/2** hasta **T/2)**
g) La serie de Fourier (utilizando el comando **FourierTrigSeries**) hasta 5 armónicos, y grafique la función y la aproximación en el mismo plano
h) Compare gráficamente la Serie de Fourier encontrada por algebra y la encontrada por Mathematica, utilice 5 armónicos.

***SOLUCIÓN***

a) Período de la función: $\boldsymbol{T = 2\pi}$ **radianes**

b) Función por partes:

$$\boldsymbol{f(wt)} = \begin{cases} \boldsymbol{2\cdot(wt+\pi)} & \boldsymbol{-\pi} < wt < -\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{-2\cdot wt} & -\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} < wt < \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} \\ \boldsymbol{2\cdot(wt-\pi)} & \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} < wt < \pi \end{cases}$$

c) Tipo de Simetría y coeficientes existentes

La forma de onda triangular, posee **Simetría Impar de Media Onda**, $\boldsymbol{f(wt+T/2) = -f(wt)}$

Y contendrá únicamente coeficientes $\boldsymbol{b_n}$ de $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{(nwt)}$, para valores de **n impar.**

$$\boldsymbol{f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)} \quad \left[\boldsymbol{\frac{a_0}{2} = 0,\quad a_n = 0,\quad \begin{matrix} b_n = 0 & para\ n\ par \\ b_n \neq 0 & para\ n\ impar \end{matrix}}\right]$$

d) Coeficientes

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(wt)\sin(nwt)\,dwt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(wt)\sin(nwt)\,dwt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (-2wt)\sin(nwt)\,dwt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 2(wt-\pi)\sin(nwt)\,dwt$$

Integrales por calculadora o computadora:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2wt\cos(nwt)}{n} - \frac{2\sin(nwt)}{n^2}\right]_{wt=0}^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi\cos(nwt)}{n} - \frac{2wt\cos(nwt)}{n} + \frac{2\sin(nwt)}{n^2}\right]_{wt=\pi/2}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} - 0 + 0\right] + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n} - \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{2\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{2\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right] + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\sin(n\pi)}{n^2} - \frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right]$$

Dado que: $\sin(n\pi) = 0,\ \ para\ todo\ valor\ de\ n$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} - \frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right]$$

$$\boldsymbol{b_n = -\frac{8\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}}$$

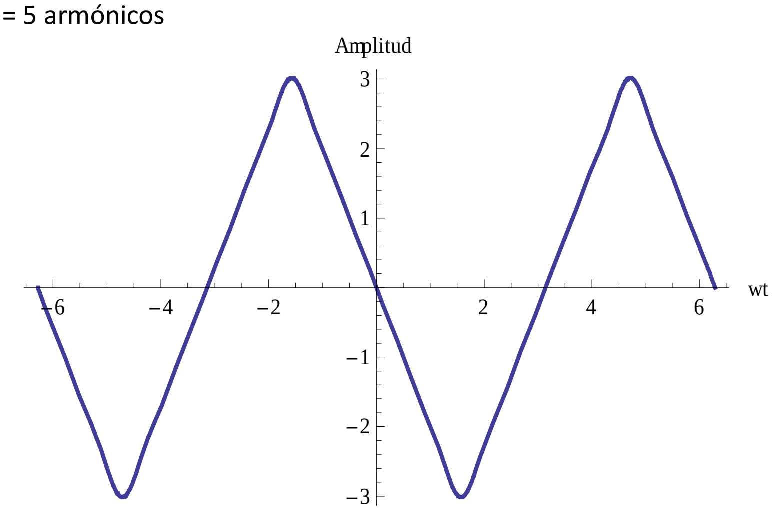
e) Serie Trigonométrica de Fourier:

$$\boldsymbol{f(wt) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}\sin(nwt) \qquad para\ n\ impar}$$

Cambiando de variable: $n = 2m - 1$ , para $m = 1,2,3,4 \ldots$

$$\boldsymbol{f(wt) = \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{8\sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)}{\pi(2m-1)^2}\sin((2m-1)wt)}$$

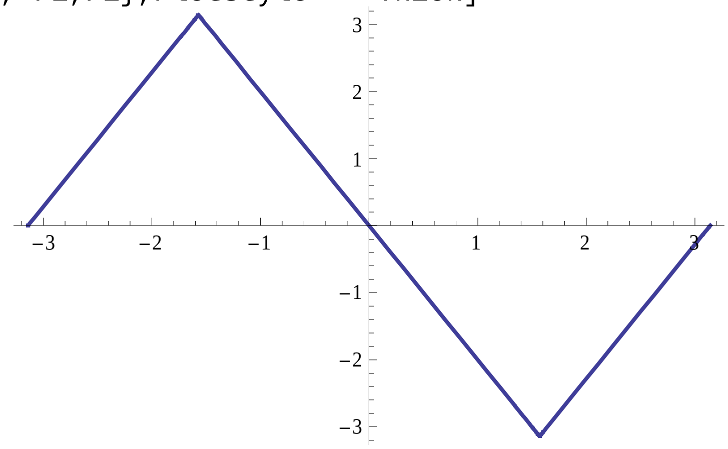
Grafica hasta n = 5 armónicos



***SOLUCION EN MATHEMATICA***

f) Construya la función utilizando la función **UnitStep** (***Estrictamente*** desde **-T/2** hasta **T/2)**

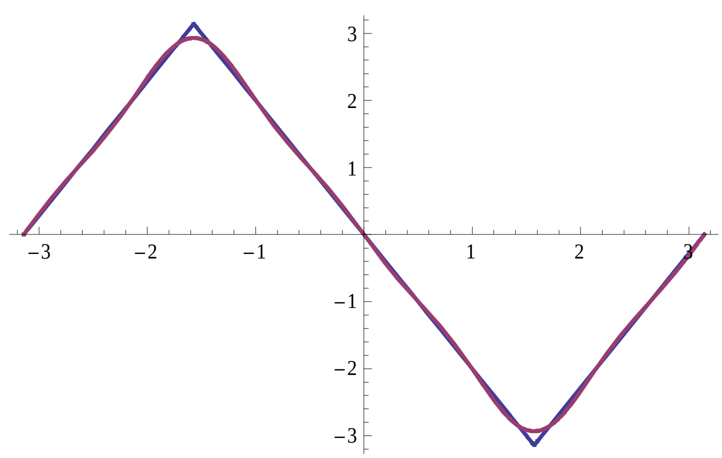
```
f[t_]:=(UnitStep[t+Pi]-UnitStep[t+Pi/2])*(2(t+Pi))
+(UnitStep[t+Pi/2]-UnitStep[t-Pi/2])*(-2t)
+(UnitStep[t-Pi/2]-UnitStep[t-Pi])*(2(t-Pi))

Plot[f[t],{t,-Pi,Pi},PlotStyle -> Thick]
```




g) La serie de Fourier (utilizando el comando **FourierTrigSeries**) hasta 5 armónicos, y grafique la función y la aproximación en el mismo plano

(***En MATHEMATICA, la función debe estar definida estrictamente desde –T/2 hasta T/2 para utilizar los comandos de Fourier***)

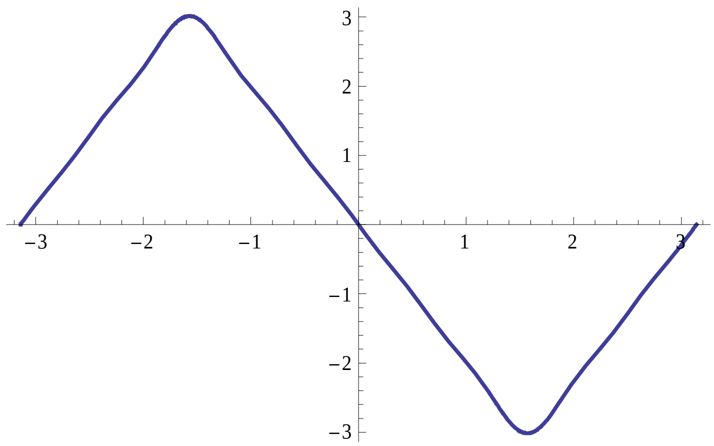
```
FourierTrigSeries[f[t],t,5]

-((8 Sin[t])/π)+(8 Sin[3 t])/(9 π)-(8 Sin[5 t])/(25 π)

stf[t_]:=-((8 Sin[t])/π)+(8 Sin[3 t])/(9 π)-(8 Sin[5 t])/(25 π)

Plot[{f[t],stf[t]},{t,-Pi,Pi},PlotStyle→Thick]
```



h) Compare gráficamente la Serie de Fourier encontrada por algebra y la encontrada por Mathematica, utilice 5 armónicos.

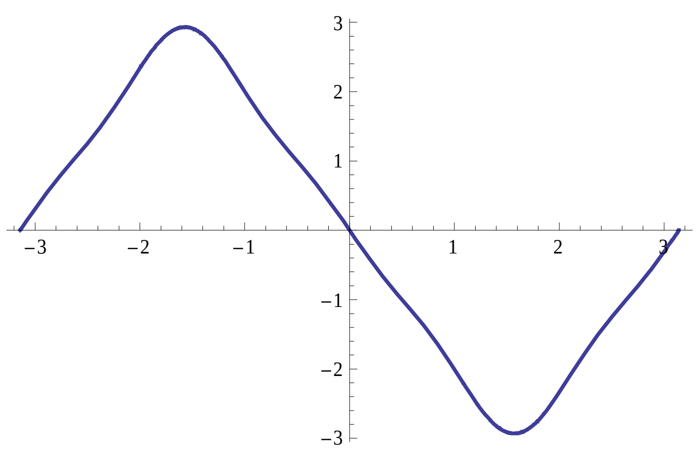
***Por algebra:***

```
Plot[Sum[(-8Sin[((2n-1)π)/2])/((2n-1)²π)*Sin[(2n-1)*wt],
{n,1,5}],{wt,-2Pi,2Pi},PlotStyle→Thick,AxesLabel→{wt,Amplitud}]
```



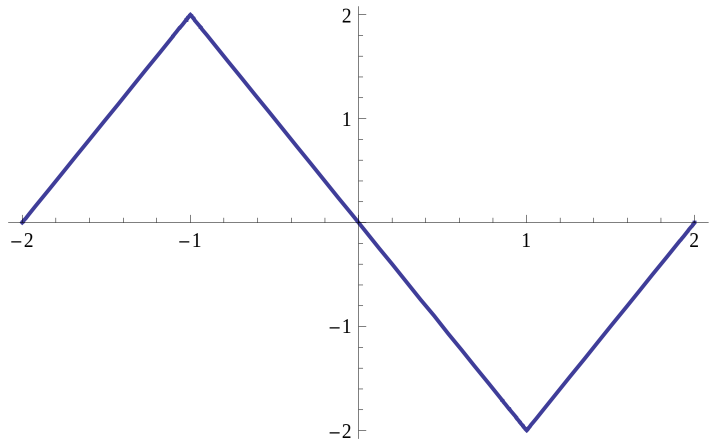

***Por Mathematica***

```
Plot[stf[t],{t,-Pi,Pi},PlotStyle→Thick]
```



***CUANDO EL PERÍODO ES DISTINTO DE $2\pi$***

Supongamos que tenemos la forma de onda periódica:

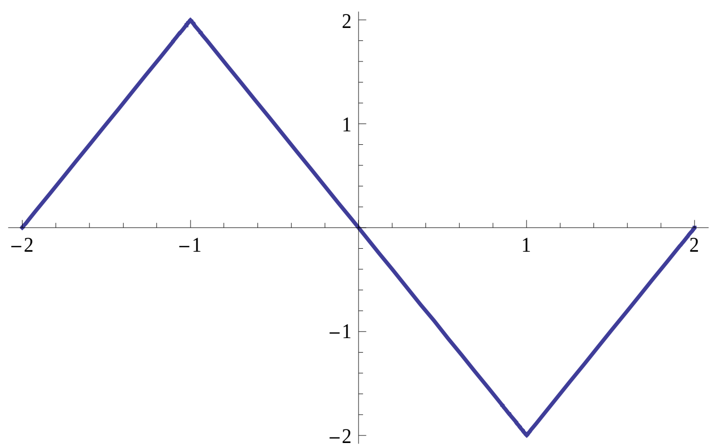



Tiene período $\boldsymbol{T = 4}$ **seg**

Entonces en Mathematica, definimos la función con **UnitStep[]** :

```
f[t_]:=(UnitStep[t+2]-UnitStep[t+1])*(2(t+2))+(UnitStep[t+1]-
UnitStep[t-1])*(-2t)+(UnitStep[t-1]-UnitStep[t-2])*(2(t-2))
```

```
Plot[f[t],{t,-2,2},PlotStyle→Thick]
```




Aplicamos **FourierTrigSeries[]**, pero ahora agregamos los parámetros:

**`FourierParameters→{1,w}`**

Donde $w$ es la frecuencia angular de la forma de onda.
En el ejemplo:

$$\boldsymbol{w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad [rad/seg]}$$

En Mathematica:

```
FourierTrigSeries[f[t],t,5,FourierParameters→{1,Pi/2}]
```

```
-((16 Sin[(π t)/2])/π2)+(16 Sin[(3 π t)/2])/(9 π2)-(16 Sin[(5 π
t)/2])/(25 π2)
```

```
stf[t_]:=-((16 Sin[(π t)/2])/π2)+(16 Sin[(3 π t)/2])/(9 π2)-(16
Sin[(5 π t)/2])/(25 π2)
```

```
Plot[{f[t],stf[t]},{t,-2,2},PlotStyle→Thick]
```