UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE 2011

MATEMÁTICA INTERMEDIA 3
Sección N
ING. ROMEL FUENTES
AUX. MANUEL MARQUEZ

MATERIAL DE APOYO # 1

VARIABLES SEPARABLES

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

es **separable** o **de variables separadas.**

Método de solución

1. Rescribir la ecuación diferencial, separando la función g(x) con el diferencial dx, igualado a la función h(y) con el diferencial dy.

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

2. Integrar ambos lados, con su respectiva variable. Recordar que la función primitiva de una integral indefinida contiene una constante desconocida.

$$H(y) = G(x) + c$$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3} \qquad ;sujeto\ a \quad y(4) = 2$$

$$Factorizar$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)(y-1)}{(x-3)(y+1)}$$

$$\frac{y+1}{y-1}dy = \frac{x+2}{x-3}dx$$

$$\int \left(1 + \frac{2}{y-1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{5}{x-3}\right) dx$$

$$y + 2\ln|y-1| = x + 5\ln|x-3| + c$$

$$Condicion: \qquad y(4) = 2$$

$$2 + 2\ln|2-1| = 4 + 5\ln|2-3| + c$$
$$c = 2 - 4 = -2$$

$$y + 2\ln|y-1| = x + 5\ln|x-3| - 2$$

Del libro: “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. DENNIS G. ZILL

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

es una **ecuación diferencial lineal** en la variable y.

Método de solución

1. Rescribir la ecuación a la forma estándar, dividiendo toda la ecuación por a1(x):
$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

2. Identificar las funciones P(x) y f(x) y calcular el factor de integración:
$$e^{\int P(x)dx}$$

3. Multiplicar toda la ecuación diferencial, en la forma estándar, por el factor de integración. El lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, y esto es:
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} * y\right] = e^{\int P(x)dx} * f(x)$$

4. Integrar ambos lados de la ecuación.

Ejemplo

$$\frac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$$

$$Factor\ de\ integración$$
$$P(x) = \sec\theta$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \sec\theta dx} = e^{\int\left(\frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right)dx} = e^{\ln|\sec\theta + \tan\theta|} = \sec\theta + \tan\theta$$

$$(\sec\theta + \tan\theta)\frac{dr}{d\theta} + r(\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta) = \cos\theta\,(\sec\theta + \tan\theta)$$
$$\frac{d}{d\theta}[r(\sec\theta + \tan\theta)] = 1 + \sin\theta$$
$$\int d[r(\sec\theta + \tan\theta)] = \int (1 + \sin\theta)\,d\theta$$

$$r(\sec\theta + \tan\theta) = \theta - \cos\theta + c$$

$$r = \frac{\theta - \cos\theta + c}{(\sec\theta + \tan\theta)}$$

Del libro: “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. DENNIS G. ZILL

ECUACIONES EXACTAS

Una expresión diferencial M(x,y) dx + N(x,y) dy es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de alguna función f(x,y).

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es una **ecuación diferencial exacta**, si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Criterio para diferencial exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Reducción a una ecuación diferencial exacta

Si la ecuación diferencial de primer orden NO cumple con el criterio de diferencial exacta, puede ser utilizado un factor de integración adecuado que multiplica a la ecuación diferencial para que se convierta en una ecuación diferencial exacta, en los casos que sea posible.

Sea la ecuacion diferencial de primer orden no exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Hay dos posibles factores de integración:

1. el factor de integración u(x), que debe ser una función de **x solamente**, sino no lo usamos.

$$u(x) = e^{\int\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx}$$

donde:
My es la derivada parcial de M respecto a la variable y,
Nx es la derivada parcial de N respecto a la variable x.

2. el factor de integración u(y), que debe ser una función de **y solamente**, sino no lo usamos.

$$u(y) = e^{\int\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy}$$

Una vez determinado el factor de integración adecuado, se multiplica por la ecuación diferencial y el producto debe quedar una ecuación diferencial exacta, con nuevas funciones M(x,y) y N(x,y). **En el caso que ninguno de los dos factores cumpla, quiere decir que la ecuación diferencial no se puede resolver por método de ecuaciones exactas.**

Método de solución

1. Escribir la ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

2. Comprobar que la ecuación diferencial sea exacta. Si no, determinar los factores de integración y convertir a ecuación diferencial exacta.

3. Si la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una funcion f(x,y) tal que cumple con:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Del libro: “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. DENNIS G. ZILL

4. Tomar las dos ecuaciones anteriores, e integrar cada una respecto a la variable indicada.

$$f_M(x,y) = \int M(x,y)\,dx = g(x,y) + a(y)$$
$$f_N(x,y) = \int N(x,y)\,dy = g(x,y) + b(x)$$

5. Comparamos los términos de cada función después de integrar y rescribimos la función f(x,y), tomando en cuenta que los términos repetidos se escriben una sola vez, y los no repetidos solo se agregan.

$$f(x,y) = g(x,y) + a(y) + b(x)$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$f(x,y) = c$$
$$g(x,y) + a(y) + b(x) = c$$

donde c es una contante.

Ejemplo

$$(x+2y)dy + y(x+y+1)dx = 0$$

$$y(x+y+1)dx + (x+2y)dy = 0$$

$$\textit{Determinar si es exacta}$$
$$M = y(x+y+1) \quad ==> \quad M_y = x+2y+1$$
$$N = x+2y \quad ==> \quad N_x = 1$$
$$M_y \neq N_x$$

$$\textit{Intentar reducir a exactas}$$
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x+2y+1-1}{x+2y} = 1 \quad , \textit{ no contiene variable } y$$
$$\textit{Factor de integración:} \quad e^{\int 1dx} = e^x$$

$$e^x y(x+y+1)dx + e^x(x+2y)dy = 0$$
$$M = e^x y(x+y+1) \quad ==> \quad M_y = xe^x + 2ye^x + e^x$$
$$N = e^x(x+2y) \quad ==> \quad N_x = xe^x + 2ye^x + e^x$$
$$M_y = N_x$$

$$f_M(x,y) = \int e^x y(x+y+1)\,dx = xye^x + y^2e^x + a(y)$$
$$f_N(x,y) = \int e^x(x+2y)\,dy = xye^x + y^2e^x + b(x)$$

$$\textit{Comparamos}$$
$$a(y) = 0 \quad ; \quad b(x) = 0$$

$$f(x,y) = xye^x + y^2e^x$$

$$xye^x + y^2e^x = c$$

Del libro: "Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera". DENNIS G. ZILL