UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE 2011

MATEMÁTICA INTERMEDIA 3
Sección N
ING. ROMEL FUENTES
AUX. MANUEL MARQUEZ

MATERIAL DE APOYO # 2

ECUACIONES HOMOGENEAS

Cuando una función $f(x,y)$ tiene la propiedad:

$$f(tx,ty)=t^{\alpha}*f(x,y)$$

Para un número real α, se dice que $f(x,y)$ es una **función homogénea de grado $\boldsymbol{\alpha}$**.

Una ecuación diferencial de primer orden:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

Es **homogénea** si los coeficientes M y N, a la vez, son funciones homogéneas del mismo grado.

$$M(tx,ty)=t^{\alpha}*M(x,y) \qquad\qquad N(tx,ty)=t^{\alpha}*N(x,y)$$

Si la ecuación diferencial es homogénea, es posible realizar una sustitución que la reduzca a una ecuación diferencial con variables separables.

Método de solución

1. Escribir la ecuación diferencial de la forma:
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$
2. Determinar que la ecuación diferencial sea **homogénea**.
$$M(tx,ty)=t^{\alpha}*M(x,y) \qquad\qquad N(tx,ty)=t^{\alpha}*N(x,y)$$
3. Realizar una de las dos posibles sustituciones:
   - $y = ux \qquad dy=udx+xdu$
   - $x = vy \qquad dx=vdy+ydv$

Recordar que la sustitución también aplica a los diferenciales.

4. Simplificar la ecuación diferencial con la sustitución.
5. Resolver la ecuación diferencial por el método de variables separables.
6. Al encontrar la solución, regresar a las variables originales.

Del libro: “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. DENNIS G. ZILL

Ejemplo. Ecuación diferencial homogénea

$$xy^2\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$$

$$(x^3-y^3)dx+xy^2dy=0$$

$$M(x,y)=(x^3-y^3) \quad \Rightarrow \quad M(tx,ty)=((tx)^3-(ty)^3)=t^3(x^3-y^3)=t^3M(x,y)$$

$$N(x,y)=xy^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(tx,ty)=tx(ty)^2=t^3xy^2=t^3N(x,y)$$

$$La\ ecuación\ diferencial\ es\ homogenea\ de\ grado\ 3$$

$$Sustitución$$

$$x\ =\ vy \qquad\qquad dx=vdy+ydv$$

$$((vy)^3-y^3)(vdy+ydv)+(vy)y^2dy=0$$

$$(v^3-1)vy^3dy+(v^3-1)y^4dv+vy^3dy=0$$

$$(v^3-1)y^4dv+v^4y^3dy=0$$

$$v^4y^3dy=-(v^3-1)y^4dv$$

$$\frac{y^3}{y^4}dy=-\frac{(v^3-1)}{v^4}dv$$

$$\frac{dy}{y}=-\left(\frac{1}{v}-v^{-4}\right)dv$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\left(\frac{1}{v}-v^{-4}\right)dv$$

$$\ln|y|=-\ln|v|-\frac{1}{3}v^{-3}+C$$

$$\ln|y|=-\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}+C$$

$$\ln|y|+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+C$$

$$\ln|x|=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+C$$

$$\ln|x|-C=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$3C-3\ln|x|=\left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$y^3=3x^3C-3x^3\ln|x|$$

$$y^3=C_2x^3-x^3\ln|x^3|$$

Del libro: “Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera”. DENNIS G. ZILL

ECUACION DE BENOULLI

La ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)\, y^n$$

Donde n es cualquier número real, se le llama **ecuación de Bernoulli**.

Cuando n es mayor o igual a 2, se puede realizar una sustitución que reduzca la ecuación diferencial original a una ecuación diferencial lineal.

Método de solución

1. Escribir la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)\, y^n$$

2. Determinar el valor de n.

3. Determinar $(1-n)y^{-n}$ y multiplicar con la ecuación diferencial.

4. La ecuación debe quedar de la forma:

$$(1-n)y^{-n} * \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n} * P(x)y = (1-n)y^{-n} * f(x)\, y^n$$

$$(1-n)y^{-n} * \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{1-n} * P(x) = (1-n)f(x)$$

5. Realizar la siguiente sustitución:
   - $u = y^{1-n}$; $y = \sqrt[1-n]{u}$; $\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

Recordar que la sustitución también aplica a los diferenciales.

6. Simplificar la ecuación diferencial con la sustitución.

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x)$$

7. Resolver la ecuación diferencial por el método de ecuación lineal.

8. Al encontrar la solución, regresar a las variables originales.

Ejemplo. Ecuación de Bernoulli

$$t^2\frac{dy}{dt}+y^2=ty$$

$$\frac{dy}{dt}+\frac{y^2}{t^2}=\frac{y}{t}$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{y}{t}=-\frac{y^2}{t^2}$$

$$n=2$$
$$u\ =\ y^{1-n}=y^{1-2}=y^{-1}$$
$$(1-n)y^{-n}=(1-2)y^{-2}=-y^{-2}$$
$$\frac{du}{dt}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dt}=-y^{-2}*\frac{dy}{dt}$$

$$-y^{-2}*\frac{dy}{dt}+y^{-2}*\frac{y}{t}=y^{-2}*\frac{y^2}{t^2}$$

$$-y^{-2}*\frac{dy}{dt}+\frac{y^{-1}}{t}=\frac{1}{t^2}$$

$$Sustitución$$
$$\frac{du}{dt}+\frac{u}{t}=\frac{1}{t^2}$$

$$Factor\ de\ integración$$
$$e^{\int\frac{dt}{t}}=e^{\ln|t|}=t$$

$$t\frac{du}{dt}+u=\frac{1}{t}$$

$$\frac{d}{dt}[tu]=\frac{1}{t}$$

$$\int d[tu]=\int\frac{1}{t}dt$$

$$tu=\ln|t|+C$$

$$ty^{-1}=\ln|t|+C$$

$$y=\frac{t}{\ln|t|+C}$$

REDUCCION A SEPARACIÓN DE VARIABLES

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

Siempre se reduce a una ecuación con variables separables, con la correcta sustitución.

Método de solución

1. Escribir la ecuación diferencial de la forma: $\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$
2. Realizar la siguiente sustitución:
   - $u = Ax + By + C$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right)$

Recordar que la sustitución también aplica a los diferenciales.

3. Simplificar la ecuación diferencial con la sustitución.

$$\frac{1}{B}\left(\frac{du}{dx} - A\right) = f(u)$$
$$\frac{du}{dx} = Bf(u) + A$$

4. Resolver la ecuación diferencial por el método de variables separables.
5. Al encontrar la solución, regresar a las variables originales.

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} - 1 = e^{y-x+5}$$
$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{-x+y+5}$$

$$Sustitución$$
$$u = -x + y + 5$$
$$y = u + x - 5$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$$

$$\frac{du}{dx} + 1 = 1 + e^{u}$$
$$\frac{du}{dx} = e^{u}$$
$$\frac{du}{e^{u}} = dx$$

$$\int e^{-u}\,du = \int dx$$
$$-e^{-u} = x + C$$
$$-e^{-(-x+y+5)} = x + C$$
$$-e^{x-y-5} = x + C$$

$$e^{x-y-5} = -x - C$$
$$\ln(e^{x-y-5}) = \ln(-x - C)$$
$$x - y - 5 = \ln(-x - C)$$
$$y = x - 5 - \ln(-x - C)$$

Del libro: "Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera". DENNIS G. ZILL