PROYECTO No. 1

Secciones K, P, U, X, y Z

Fecha de entrega: viernes 20 de marzo de 2020

Introducción:

Este proyecto tiene como objetivo familiarizar al estudiante del curso Matemática básica 1 con el uso de un sistema algebraico por computadora en la solución de problemas algebraicos. Entre los programas que pueden ser utilizados para este propósito están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, MatLab, GeoGebra y Python. El estudiante puede utilizar el programa que considere conveniente.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este proyecto se presentan en tres problemas. En el primero de ellos se aborda la solución de ecuaciones utilizando métodos gráficos y métodos computacionales. En el segundo problema el estudiante debe utilizar sus conocimientos de precálculo así como la tecnología para resolver un problema de modelado aplicado a la geometría. En el tercer y último problema también se aborda un problema de geometría, pero en una situación en la que se introduce al estudiante al concepto de series, que será abordado con mayor detalle en cursos posteriores. El proyecto deberá realizarse en parejas.

Problema 1: Solución de ecuaciones

Una ecuación con una incógnita de la forma

$$f(x) = g(x)$$

Puede resolverse en forma aproximada utilizando el procedimiento siguiente:

1. Exprese la ecuación en la forma $F(x) = f(x) - g(x) = 0$
2. Dibuje la representación gráfica de la función $F(x)$
3. Las soluciones de la ecuación se encuentran en los valores en donde la gráfica interseca al eje x. Para encontrar estos valores con la precisión requerida pueden hacerse ampliaciones sucesivas en los puntos de intersección, hasta que tengamos la solución con tantos decimales como sea necesario.

Para las ecuaciones dadas:

i) Utilice el procedimiento descrito para encontrar las soluciones de cada ecuación con al menos dos decimales exactos.

ii) Encuentre las soluciones exactas de las ecuaciones utilizando los comandos apropiados del programa de cómputo utilizado.

1.1 $x^5 = x + 1$

1.2 $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 4$

1.3 $\frac{x}{x^2+1} = \sqrt{1-x}$

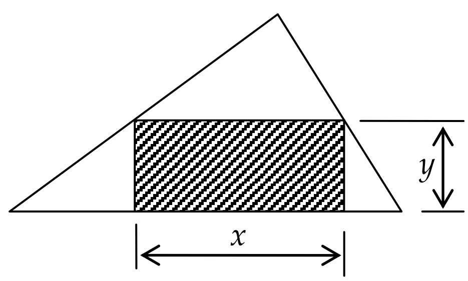
1.4 $|x-1| + |x-3| + |x+1| + |x+3| = 12$

1.5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones dibujando en el mismo sistema de coordenadas las representaciones gráficas de las ecuaciones y luego haciendo aproximaciones hasta obtener las coordenadas aproximadamente exactas de los puntos de intersección.

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$$
$$16(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 144$$

Problema 2: Modelado mediante funciones.

Se quiere construir un edificio rectangular, dentro de un terreno que tiene la forma de un triángulo rectángulo con lados de 50, 40 y 30 metros respectivamente. Por razones arquitectónicas, el frente del edificio debe coincidir con la hipotenusa del triángulo rectángulo, como se ilustra en la siguiente figura



a) En papel milimetrado haga un dibujo a escala del terreno.

b) Asigne los valores a x indicados en la tabla de abajo, para mida los correspondientes valores de y, calcule el área del edificio. Repita este procedimiento 11 veces y complete la tabla.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A(x)											

c) Utilice el programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de los datos de la tabla.

d) ¿Qué curva cree que se ajusta mejor a los datos, una parábola o un polinomio de grado 3?

e) Utilice su SAC para obtener un modelo polinomial de grado 2 que se ajuste a los datos.

f) Dibuje la representación gráfica de los datos y el modelo obtenido en una misma pantalla.

g) Utilice su SAC para obtener un modelo polinomial de grado 3 que se ajuste a los datos.

h) Dibuje la representación gráfica de los datos y el modelo anterior en una misma pantalla.

i) De los dos modelos obtenidos, utilice el que mejor se ajuste a los datos para estimar las dimensiones del edificio de área máxima (el rectángulo más grande inscrito en el triángulo en la posición dada).

j) Utilizando el teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos y las relaciones que considere apropiadas entre las variables, obtenga algebraicamente el modelo exacto que exprese el área del edificio en términos de x.

k) Dibuje en un mismo sistema de coordenadas la gráfica del modelo exacto y los modelos aproximados obtenidos anteriormente.

l) Compare el modelo exacto con los modelos aproximados. ¿Cual de ellos es el que mejor ajusta los datos?

Problema 3: Funciones por partes e Impuesto sobre la Renta en Guatemala.

En Guatemala, las personas en relación de dependencia (personas cuyo ingreso exclusivo proviene de salarios pagados por un empleador) deben pagar Impuesto sobre la Renta, de acuerdo con la Ley de Actualización Tributaria (Decreto 10-2012). El Título III de dicha ley indica cómo debe pagarse dicho impuesto (puede descargar esta ley aquí: https://portal.sat.gob.gt/portal/descarga/1899/legislacion-tributaria/18261/decreto-numero-10-2012-ley-de-actualizacion-tributaria.pdf). En este problema vamos a plantear una función por partes para el impuesto I que debe ser pagado a partir de un ingreso bruto (total) de x quetzales al año.

Para ello, use la siguiente información, basada en los artículos 72 y 73 de la ley ya mencionada:

a) El asalariado percibe un ingreso bruto (el total de su salario anual sin ningún descuento) de x quetzales al año, dividido en catorce sueldos (incluyendo aguinaldo y bono 14).

b) El aguinaldo y bono 14 se consideran rentas exentas (no pagan impuesto sobre la renta).

c) Lo que el asalariado paga en concepto de IGSS (un 4.5% del sueldo mensual, descontado solo de 12 sueldos, ya que no se descuenta de bono 14 y aguinaldo), es también parte de las rentas exentas (no pagan impuestos).

d) Todo asalariado puede deducir hasta Q 48,000.00 de su ingreso bruto como gastos personales sin comprobación alguna.

e) Todo asalariado puede deducir hasta un máximo de Q 12,000.00 por concepto de IVA pagado en sus compras (el 12% de la factura), siempre y cuando presente el detalle de las facturas (la planilla del IVA). Suponga que el asalariado gasta el 80% de su ingreso bruto en compras con factura (el otro 20% es ahorro o bien gastos por los que no le dan factura).

1. En base a la información anterior exprese la renta imponible R (es decir, la cantidad de dinero sobre la cual se calculará el impuesto), en función del ingreso bruto, x. Tenga presente a la hora de plantear R que una vez ha llegado a acreditar Q 12,000.00 de IVA, el resto del IVA pagado en sus compras no puede ser deducido de la renta imponible.

2. Grafique la función por partes R, obtenida en el inciso anterior, usando un SAC.

3. Luego, con base en la función R del inciso anterior, y la siguiente tabla (obtenida del Decreto 10-2012), encuentre una función por partes que represente la cantidad de dinero I, que se deberá de pagar por Impuesto sobre la Renta, en términos del ingreso bruto, x:

Rango de renta imponible	**Importe fijo**	**Tipo impositivo de**
Q.0.01 a Q 300,000.00	Q.0.00	5% sobre la renta imponible.
Q.300,000.01 en adelante	Q.15,000.00	7% sobre el excedente de Q.300,000.00.

Tenga presente que no es posible que el resultado del impuesto sea negativo, es decir, si la renta imponible anual R, es menor que el monto total de las deducciones, el impuesto por pagar será de cero quetzales.

4. Usando un SAC, grafique la función por partes *I*, obtenida en el inciso anterior.

5. Usando la gráfica obtenida en (3), determine en qué rango de ingreso bruto *x*, el asalariado no paga impuesto sobre la renta.

6. Determine, usando un método gráfico, con cuánto ingreso bruto *x*, el asalariado pasa de pagar el 5% al 7% de ISR.

7. Determine, usando la función obtenida en (2) y la gráfica de (3), cuál es el ingreso bruto de una persona que paga Q40,000.00 de ISR al año.

8. Usted se gradúa de ingeniero en 5 años, y luego de 5 años, le ofrecen un ascenso. Su empleador le presenta dos opciones:

   a. Un puesto donde tiene un ingreso bruto de Q 360,000.00 al año como trabajador con todas sus prestaciones.
   b. Un puesto en el que tiene un ingreso bruto de Q 400,000.00 al año pero bajo otras condiciones, en las cuales no tiene derecho a IGSS, y no tiene aguinaldo ni bono 14 (sólo tiene 12 sueldos).

   ¿En cuál de los dos puestos pagará más ISR? ¿En cuál de los dos puestos tendrá mayores ingresos netos (lo que gana después de los descuentos y los impuestos)? En base a las dos respuestas anteriores, ¿cuál de los dos puestos le conviene aceptar? En cada caso, justifique con sus cálculos su respuesta.

Referencias

[1] Edwards y Penney. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Séptima edición, Pearson-Prentice Hall.

[2] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemática Básica 1.* Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.

[3] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo.* Octava edición. Cengage Learning.

[4] Saquimux J. *Geometría de Precálculo*.

[5] Gobierno de Guatemala. *Ley de Actualización Tributaria, Decreto 10-2012*. Disponible en: https://portal.sat.gob.gt/portal/descarga/1899/legislacion-tributaria/18261/decreto-numero-10-2012-ley-de-actualizacion-tributaria.pdf