PROYECTO NO.1

Entrega: viernes 20 de marzo

Introducción:

El desarrollo de la tecnología en el área de las computadoras y las calculadoras con capacidades numéricas, simbólicas y de graficación; ha influido en las metodologías utilizadas en los procesos enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe en parte a que los Sistemas Algebraicos por Computadora (SAC) permiten visualizar todo tipo de gráficas y realizar una amplia variedad de cálculos que hace apenas algunos años era imposible. Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conocedores de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a través del taller de matemática y proyectos grupo. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral.

Objetivos:

Uno de los objetivos de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral. El segundo objetivo es fomentar el trabajo en equipo en la solución de problemas, específicamente en el área de matemática.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de dos estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica, Scientific Notebook, MatLab* o *GeoGebra*.
3. El informe debe ser presentado en hojas tamaño carta, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema No. 1: Cálculo de límites

En este problema se utiliza una computadora para el análisis numérico, gráfico y algebraico de los límites.

Análisis numérico

Suponga que queremos aproximar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Cuando x tiende al número a por la derecha podemos utilizar la serie de números

$$a+h,\ a+h^2,\ a+h^3,\cdots,\ a+h^n$$

donde h es un número pequeño, $0<h<1$. Por ejemplo, si $h=0.1$, obtenemos la siguiente serie de números que se aproximan a $x=a$ por la derecha

$$a+0.1,\ a+(0.1)^2,\ a+(0.1)^3,\cdots,\ a+(0.1)^n=a+0.1,\ a+0.01,\ a+0.001,\cdots,\ a+(0.1)^n$$

De la misma forma, para analizar el límite cuando x tiende a a por la izquierda podemos utilizar una serie de la forma

$$a-h,\ a-h^2,\ a-h^3,\cdots,\ a-h^n$$

si $h=0.1$ obtenemos

$$a-0.1,\ a-(0.1)^2,\ a-(0.1)^3,\cdots,\ a-(0.1)^n=a-0.1,\ a-0.01,\ a-0.001,\cdots,\ a-(0.1)^n$$

Para ilustrar este procedimiento, considera la función $f(x)=\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$, cuando $x\to 0^+$, con $h=0.2$, obtenemos la tabla numérica siguiente:

x	$f(x)$
0.2	0.0998
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000

Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}=\frac{1}{10}$$

Análisis gráfico:

Una forma sencilla de calcular aproximadamente un límite utilizando la representación gráfica de la función consiste en hacer uno o más acercamientos de la gráfica en el valor de x en donde queremos calcular el límite. Mientras más acercamientos efectuemos, mejor será la estimación que hagamos.

Análisis algebraico:

La mayoría de programas de matemática tienen uno o más comandos para el cálculo exacto de límites. Consulte el instructivo del programa que está utilizando para obtener el comando apropiado que le permita calcular directamente un límite.

Ejercicios:

Para cada uno de los límites que se proponen a continuación:

a. Utilice su programa de cómputo para calcular aproximadamente los límites utilizando el análisis numérico descrito anteriormente. Deberá utilizar diferentes valores de *h* en cada problema y calcular el límite por la izquierda y por la derecha.

b. Calcule los límites gráficamente realizando al menos dos aproximaciones de la gráfica. Debe dejar constancia gráfica de sus aproximaciones.

c. Utilice su programa de cómputo para calcular el valor exacto de los límites.

d. Calcule el límite utilizando procedimientos algebraicos

1.1 $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x} \right)$

1.2 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

1.3 $\lim_{x \to \infty} x \, sen \left(\frac{1}{x} \right)$

1.4 $\lim_{x \to 0} \left(2x + e^{3x} \right)^{4/x}$

Problema No. 2. Evaluación de derivadas como límites

Dadas las funciones

a. $f(x) = \operatorname{sen} x$

b. $f(x) = \ln x$

1.1 Defina 5 funciones de la forma:

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para los valores de $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$.

1.2 Utilice el Programa de cómputo para calcular *f '(x)*.

1.3 En un mismo sistema de coordenadas dibuje las representaciones gráficas de las 5 funciones obtenidas para los distintos valores de *h* y dibuje la representación gráfica de *f '(x)*.

1.4 Escriba un breve párrafo explicando sus observaciones.

Problema No. 3: Modelado de funciones

La tabla siguiente proporciona la población mundial en durante los últimos 120 años en millones de personas.

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Población	1650	1750	1860	2070	2300	2520	3020	3700	4450	5300	6070	6860	7720

2.1 Utilice su SAC para dibujar la representación gráfica de los datos.

2.2 Calcule la tasa de crecimiento promedio entre 1920 y 1930 y entre 1990 y 1996. ¿En qué época aumentaba más rápidamente la población?

2.3 Estime la tasa de crecimiento instantánea en los años 1920 y 1990. ¿Coinciden sus resultados con los del inciso anterior?

2.4 Utilice regresión en su SAC para obtener un polinomio de tercer grado $P(t)$ que sirva para modelar el crecimiento de la población mundial en los últimos 120 años.

2.5 Utilice el modelo obtenido para calcular la razón de cambio $\frac{dP}{dt}$. Calcule el crecimiento de la población en 1920 y 1990.

2.6 Repita los incisos 2.4 y 2.5 modelando el crecimiento de la población mundial con un modelo de la forma

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Nota: *Recuerde que para obtener un modelo exponencial como el anterior, es mejor linealizar los datos y obtener un modelo de la forma* $\ln P = \ln C + kt$ *y luego despejar P para obtener el modelo exponencial.*

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, sexta edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook* y *Mathematica.*

[3] Edwards y Penney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt

[5] http://matematicaenlinea.com