

Proyecto 1

Fecha de entrega: lunes 28 de febrero de 2022

Introducción:

El desarrollo de proyectos es importante en la formación del estudiante ya que le permite desarrollar habilidades para encontrar soluciones a problemas, los cuales requieren el uso de tecnología para su solución.

Para resolver los problemas, el estudiante debe realizar un análisis matemático así como realizar los cálculos utilizando el software que consideren conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebbok, Mathematica, Maple, derive, Mathlab etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

Criptografía

Muchas veces en el mundo de la informática, se necesita enviar mensajes encriptados que sean difíciles de descifrar por personas a las que no se les quiere dar la información pero que si lo sea por las personas que lo deben recibir. Si bien es cierto que hay muchas formas de encriptar, en la mayoría de los casos se usa el **álgebra de matrices** para hacerlo. Se dará a continuación un ejemplo muy eficaz donde se puede usar una matriz código cuadrada.

Se escoge una matriz **M** que tenga inversa, la cual solo debe ser conocida por las personas que envían y las personas que reciben el mensaje.

Ejemplo: Si queremos encriptar el mensaje "Si no estás haciendo que la vida de alguien más sea mejor, estás perdiendo el tiempo." reemplazamos cada letra del mensaje por el número que le corresponde en el abecedario.

A = 1	B=2	C=3	D=4	E=5	F=6	G=7
H=8	I=9	J=10	K=11	L=12	M=13	N=14
Ñ=15	O=16	P=17	Q=18	R=19	S=20	T=21
U=22	V=23	X=24	Y=25	Z=26		

Dándole al **espacio en blanco el cero (0)**, al punto (.) el 27, **a la coma (,) el 28**, a la a tildada (á) el 29, **e tildada el (é) el 30**, i tildada el (í) el 31, **la o tildada el (ó) el 32**, a las comillas (") el 33 **a los dos puntos (:)** el 34 a los signos de admiración (¡) el 35 y (!) el 36.

En este caso tenemos: 56, 22, 37, 32, 44, 57, -13, 62, 84, 11, 41, 35, 16, 35, 22, 36, 48, **66, 101, 51, 110, 126, 146, 127, 103, 140, 139, 187, 166, 120, 45, 126, 86, 171, -20, 9, -4, 34, 0, 57, 36, 11, 22, -10, 48, 73, 48, 8, 70, 22, 39, 13, 70, 31, 80, 79, 130, 121, 47, 78, 80, 139, 163, 110, 26, 122, 57, 131, -23, 5, -26, 22, -13, -3, 27, 5, -5, 18, 34, 12, 22, -8, 35, 10, 12.**

La lista de números obtenida debe ser ordenada como una matriz de cinco filas y las columnas que sean necesarias, colocando los números en mismo orden del listado (nótese que se van formando las filas), así:

$$\begin{bmatrix} 20 & 9 & 0 & 14 & 16 & 0 & 5 & 20 & 21 & 29 & 20 & 0 & 8 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 14 & 4 & 16 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 12 & 1 & 0 & 23 & 9 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 12 & 18 & 22 & 9 & 5 & 14 & 0 & 13 & 29 & 20 & 0 & 20 & 5 & 1 \\ 0 & 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 28 & 0 & 5 & 20 & 21 & 29 & 20 & 0 & 17 & 5 & 19 \\ 4 & 9 & 5 & 14 & 4 & 16 & 0 & 21 & 22 & 0 & 21 & 9 & 5 & 13 & 17 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior será multiplicada por la izquierda por M . En este caso:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que el producto a realizar es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 20 & 9 & 0 & 14 & 16 & 0 & 5 & 20 & 21 & 29 & 20 & 0 & 8 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 14 & 4 & 16 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 12 & 1 & 0 & 23 & 9 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 12 & 18 & 22 & 9 & 5 & 14 & 0 & 13 & 29 & 20 & 0 & 20 & 5 & 1 \\ 0 & 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 28 & 0 & 5 & 20 & 21 & 29 & 20 & 0 & 17 & 5 & 19 \\ 4 & 9 & 5 & 14 & 4 & 16 & 0 & 21 & 22 & 0 & 21 & 9 & 5 & 13 & 17 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

Al realizar el producto nos queda el mensaje encriptado.

$$\begin{bmatrix} 56 & 22 & 37 & 32 & 44 & 57 & -5 & 62 & 84 & 11 & 41 & 35 & 16 & 35 & 22 & 36 & 48 \\ 66 & 101 & 51 & 110 & 126 & 146 & 95 & 13 & 140 & 139 & 187 & 155 & 120 & 45 & 126 & 86 & 171 \\ -20 & 9 & -4 & 34 & 0 & 57 & 28 & 11 & 22 & -108 & 48 & 73 & 48 & 8 & 70 & 22 & 39 \\ 13 & 70 & 31 & 80 & 79 & 130 & 89 & 47 & 78 & 80 & 139 & 163 & 110 & 26 & 122 & 57 & 131 \\ -23 & 5 & -26 & 22 & -13 & -3 & 19 & 5 & -5 & 18 & 34 & 12 & 22 & -8 & 35 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Esta matriz será enviada como un simple listado de números sin ninguna relación aparente.

56, 22, 37, 32, 44, 57, -13, 62, 84, 11, 41, 35, 16, 35, 22, 36, 48, 66, 101, 51, 110, 126, 146, 127, 103, 140, 139, 187, 166, 120, 45, 126, 86, 171, -20, 9, -4, 34, 0, 57, 36, 11, 22, -10, 48, 73, 48, 8, 70, 22, 39, 13, 70, 31, 80, 79, 130, 121, 47, 78, 80, 139, 163, 110, 26, 122, 57, 131, -23, 5, -26, 22, -13, -3, 27, 5, -5, 18, 34, 12, 22, -8, 35, 10, 12.

Para descryptar el mensaje, quien lo recibe debe armar la matriz a partir de los datos recibidos (en este caso una matriz de 5 por 17 formando filas al ir ingresando los datos) y multiplicarla por M^{-1} siempre por la izquierda, donde:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 & -5 & -3 \\ -11/4 & 13/4 & 15/4 & -4 & -7/2 \\ -9/2 & 11/2 & 13/2 & -7 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 17/4 & -19/4 & -21/4 & 6 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 & -5 & -3 \\ -11/4 & 13/4 & 15/4 & -4 & -7/2 \\ -9/2 & 11/2 & 13/2 & -7 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 17/4 & -19/4 & -21/4 & 6 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 & 22 & 37 & 32 & 44 & 57 & -5 & 62 & 84 & 11 & 41 & 35 & 16 & 35 & 22 & 36 & 48 \\ 66 & 101 & 51 & 110 & 126 & 146 & 95 & 103 & 140 & 139 & 187 & 166 & 120 & 45 & 126 & 86 & 171 \\ -20 & 9 & -4 & 34 & 0 & 57 & 28 & 11 & 22 & -10 & 48 & 73 & 48 & 8 & 70 & 22 & 39 \\ 13 & 70 & 31 & 80 & 79 & 130 & 89 & 47 & 78 & 80 & 139 & 163 & 110 & 26 & 122 & 57 & 131 \\ -23 & 5 & -26 & 22 & -13 & -3 & 19 & 5 & -5 & 18 & 34 & 12 & 22 & -8 & 35 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Al realizar el producto se obtiene como resultado, el mensaje (en este caso, el mensaje que se encriptó al inicio):

$$\begin{bmatrix} 20 & 9 & 0 & 14 & 16 & 0 & 5 & 20 & 0 & 29 & 20 & 0 & 8 & 1 & 3 & 9 & 5 \\ 14 & 4 & 6 & 0 & 18 & 22 & 5 & 0 & 12 & 1 & 0 & 23 & 9 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 12 & 18 & 22 & 9 & 5 & 14 & 0 & 13 & 29 & 20 & 0 & 20 & 5 & 1 \\ 0 & 13 & 5 & 10 & 16 & 19 & 28 & 0 & 5 & 20 & 21 & 1 & 20 & 0 & 17 & 5 & 19 \\ 4 & 9 & 5 & 14 & 4 & 16 & 0 & 21 & 22 & 0 & 21 & 9 & 5 & 13 & 17 & 16 & 27 \end{bmatrix}$$

“Si no estás haciendo que la vida de alguien más sea mejor, estás perdiendo el tiempo.”

Con el ejemplo dado, el estudiante debe ser capaz de descryptar los siguientes dos mensajes, de los cuales se le proporciona continuación la información necesaria.

Problema 1.a

Descryptar el siguiente mensaje, usando el procedimiento del ejemplo.

6, 73, 41, 19, 16, 34, 16, 15, 8, 108, 11, 37, 8, 17, 30, 73, 66, 25, 177, 88, 114, 113, 36, 106, 19, 113, 153, 167, 65, 114, 66, 109, 94, 192, -34, -39, -53, -26, -13, -26, -40, 9, -14, -60, -17, -3, -10, -11, -29, -23, -66, -3, 0, -25, 52, 36, -18, 20, -4, 53, -83, 76, 6, 72, 11, 6, -49, 10, -29, -126, -121, -19, -98, 12, -123, 1, -77, -186, -128, 23, -4, -61, -129, -83, -152.

Del cual se sabe que la matriz código utilizada es: $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

Como se puede observar, la matriz anterior es de 5 filas y 5 columnas, por lo que el mensaje encriptado deberá ordenarse en una matriz de 5 filas y el número de columnas necesario para ordenar todos los datos.

Problema 1.b

Usando el procedimiento del ejemplo, descrypte el siguiente mensaje.

97, 73, 62, 55, 86, 45, 91, 86, 49, 52, 68, 19, 13, 64, 70, 28, 115, 26, -38, 108, 59, 75, -3, -17, 50, -10, -40, 16, 74, -11, 28, 56, 65, 61, -104, -37, -168, -62, -111, -64, -12, -63, -35, -33, -98, -92, -7, -50, -43, -94, -136, 4, -31, 66, 22, 30, -2, -35, 8, -11, -25, 6, 49, -7, 3, 9, 42, 23.

NOTA: Se sabe que el mensaje **no** está entre comillas, que la primera palabra es **mejor** y que la matriz código utilizada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, la matriz anterior es de 5 filas y 5 columnas, por lo que el mensaje encriptado deberá ordenarse en una matriz de 5 filas y el número de columnas necesario para ordenar todos los datos.

Para este inciso parte, haga lo siguiente:

- Encuentre la matriz inversa de M en términos de a , b & c .
- Con la inversa obtenida, plantee un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a , b , & c , resuelva el sistema para obtener dichos valores.
- Dé la matriz M con los valores obtenidos.
- Multiplique la inversa de M por la matriz de 5 filas y el número de columnas necesario, obtenida de los datos que se dan en el enunciado del mensaje. (Recuerde que al ir llenando la matriz, debe ir formando columnas).

Problema 2:

- a. Dada $f(x) = \frac{-4x^2 + 25x + 77}{-4(x+1)(x-9)}$
- Grafique la función para valores de x en el intervalo $[-5, 12]$.
 - Expresé la integral $\int_{-4}^{10} \left| \frac{-4x^2 + 25x + 77}{-4(x+1)(x-9)} \right| dx$ como la suma de varias integrales impropias.
 - Evalúe a mano las integrales planteadas en el inciso anterior.
 - Evalúe $\int_{-4}^{10} \left| \frac{-4x^2 + 25x + 77}{-4(x+1)(x-9)} \right| dx$ con ayuda de un sistema computacional de manera directa (evalúe la integral en la computadora, sin olvidar que debe ingresarla como la escribió en el inciso anterior).
 - Comente acerca de cualquier discrepancia (haga una comparación entre los resultados de los dos incisos anteriores).

Problema 3:

- a. Para $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ encuentre un valor aproximado de la misma, con cuatro cifras decimales, usando La regla de trapecio con $n=18$.
- Evalúe $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ con ayuda de un sistema computacional de manera directa evalúe la integral en la computadora.
 - Comente acerca de cualquier discrepancia (haga una comparación entre los resultados de los dos incisos anteriores).
- b. Para $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$ encuentre un valor aproximado de la misma, usando La regla del punto medio con $n=20$.
- Evalúe $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$ con ayuda de un sistema computacional de manera directa evalúe la integral en la computadora.
 - Comente acerca de cualquier discrepancia (haga una comparación entre los resultados de los dos incisos anteriores).

- a. Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemática* y *Mathcad*
- b. Álgebra Lineal una introducción moderna. David Poole. CENGAGE Learning, segunda edición.
- c. Cálculo Trascendentes tempranas. James Stewart. Cengage. Octava edición.
- d. Cálculo Trascendentes tempranas. Dennis G. Zill. McGraw Hill. Cuarta Edición
- e. Cálculo De una variable Sexta edición. James Stewart. CENGAGE Learning, séptima edición.