FACULTAD DE INGENIERIA | **Matemática Intermedia II**
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA | **Primer semestre de 2022**
Fecha de entrega: miércoles 15 de marzo

PROYECTO 1

Introducción

Para resolver los problemas, el grupo de estudiantes debe realizar un análisis matemático y realizar cálculos utilizando el software que consideren conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, derive, Mathlab, etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático y de la hoja electrónica, o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

Descripción

El proyecto trata sobre las ecuaciones diferenciales parciales elípticas y las condiciones de frontera. Debe desarrollarse en grupos de 4 estudiantes, siguiéndola guía de informes de proyectos del Departamento de Matemática.

Problema 1
Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Generalmente las ecuaciones diferenciales parciales se clasifican de manera similar a las secciones cónicas. La ecuación diferencial parcial que se considerará involucra $u_{xx}(x,y)$ y $u_{yy}(x,y)$ y es una ecuación elíptica. A la ecuación elíptica particular que se considerará se le conoce como ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

En esta ecuación, se supondrá que f describe la entrada para el problema en una región D. Las ecuaciones de este tipo surgen en el estudio de diferentes problemas físicos independiente del tiempo, como la distribución de estado estable de calor en una región plana y problemas de estado estable bidimensionales que implican fluidos incomprensibles.

Deben imponerse restricciones adicionales para obtener una solución única para la ecuación de Poisson. Por ejemplo, el estudio de la distribución de estado estable de calor en una región plana requiere que $f(x,y) = 0$, lo cual resulta en una simplificación para la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Si la temperatura dentro de la región se determina mediante la distribución de temperatura en la frontera de la región, las restricciones reciben el nombre de condiciones de frontera de Dirichlet, dadas por

$$u(x,y) = g(x,y)$$

Para todas las (x,y) en S la frontera de D.

Considere el problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 4, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

Sujeto a las condiciones de frontera:

$$u(x,0) = x^2,\ u(x,2) = (x-2)^2,\ \ u(0,y) = y^2,\ u(1,y) = (y-1)^2,$$

a) Dibuje el rectángulo $R = \{(x,y)|\ \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$
b) Sean $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}$ el último dígito del carné de cada uno de los cuatro integrantes del grupo, y sea $\boldsymbol{k}$ el entero mayor que

$$k > \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} u_i = \frac{u_1, u_2, u_3, u_4}{4}$$

Divida el intervalo de x en k subintervalos de ancho Δx , es decir

$$\Delta x = \frac{1-0}{k}$$

Y divida el intervalo de y en k subintervalos de ancho Δy, es decir

$$\Delta y = \frac{2-0}{k}$$

c) Evalúe la frontera en cada punto obtenido en el paso anterior.
d) Muestre que la función $u(x,y) = (x-y)^2$ es solución de la ecuación diferencial parcial.
e) Evalúe la solución en cada punto obtenido en el inciso b) y demuestre que se satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet.

SUPERFICIES DE NIVEL

Las superficies de nivel son las gráficas en el espacio que corresponden a

$$f(x,y,z) = k$$

Donde k es una constante.

En el caso de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ las superficies de nivel son esferas con centro en el origen.

Problema 2

Dibuje las superficies de nivel para las siguientes funciones.

a) $f(x,y,z) = x + 2y + 4z$
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$
c) $f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + 9z^2$
d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$

Referencias

a) Cálculo De varias variables, Trascendentes tempranas James Stewart. CENGAGE Learning. Octava edición.
b) Cálculo, Trascendentes tempranas Edwards & Penny.Séptima edición. Prentice Hall.
c) Cálculo, LARSON HOSTETLER EDWARDS, séptima edición. Editorial Mc Graw Hill.
d) Cálculo De varias variables. Ron Larson y Bruce H. Edwards. Novena edición.Editorial Mc Graw Hill.