Matemática Intermedia III **Proyecto 1**
Primer semestre del 2,020 **Facultad de Ingeniería**

Proyecto 1

Fecha de entrega: miércoles 25 de marzo de 2020.

Introducción:

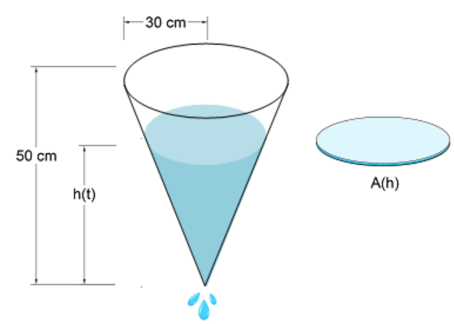
El desarrollo de proyectos de grupo, es importante en la formación del estudiante ya que le permite interactuar con sus compañeros en la solución de problemas, los cuales requieren el uso de tecnología para su solución.

Para resolver los problemas, el grupo de estudiantes debe realizar un análisis matemático así como realizar los cálculos utilizando el software que consideren conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebbok, Mathematica, Maple, derive, Mathlab, etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

LEY DE TORRICELLI

Mediante la presente práctica el estudiante debe comparar la efectividad del cálculo utilizando el modelo de vaciado de tanques mediante el uso de la ley de Torricelli con mediciones físicas en un recipiente con agua.



Si perforamos un agujero en un recipiente lleno de agua, el líquido sale con una razón gobernada por la ley de Torricelli, que establece que la razón de cambio del volumen es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del líquido. La ecuación de la razón dada en la figura mostrada a la derecha, surge del principio de Bernoulli de hidrodinámica que establece que la cantidad $P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ es una constante. Aquí P es la presión, ρ es la densidad del fluido, v es velocidad y g la aceleración de la gravedad. Comparando la parte superior del fluido, a la altura h con fluido en el agujero, tenemos que:

$$P_{partesuperior}+\frac{1}{2}\rho v^2{}_{partesuperior}+\rho gh=P_{agujero}+\frac{1}{2}\rho v^2{}_{agujero}+\rho g\cdot 0$$

Si la presión en la parte superior y en el fondo son las dos igual a la presión atmosférica y el radio del agujero es mucho menor que el radio del cubo, entonces $P_{parte superior} = P_{agujero}$ y $v_{parte superior} = 0$, por lo que $\rho gh = \frac{1}{2}\rho v^2$ conduce a la ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}.$ Puesto que $\frac{dV}{dt} = -A_{agujero}v$, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dV}{dt} = -A_{agujero}\sqrt{2gh}.$$

De acuerdo a lo anterior, la ley de Torricelli establece que cuando la superficie del agua está a una altura h, el agua se drena con una velocidad que tendría si cayera de manera libre desde una altura h (ignorando varias formas de fricción)

a. Muestre que la ecuación diferencial de la gravedad estándar $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ conduce a la conclusión de que un objeto que cae desde una altura h aterrizará con una velocidad de $-\sqrt{2gh}.$
b. Sean $A(h)$ el área de la sección transversal del agua en el tanque a la altura h y a el área del agujero de drenado. La razón con que el agua sale del tanque en el instante t se puede expresar como el área de la sección transversal a la altura h por la razón de cambio de altura del agua. En forma alternativa, la razón con la que el agua sale por el agujero se puede expresar como el área del agujero por la velocidad del agua drenada, Iguale estas expresiones e inserte la ley de Torricelli para deducir la ecuación diferencial $A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}.$
c. El tanque cónico de la figura mostrada con anterioridad tiene un radio de 30 cm, cuando se llena hasta una profundidad inicial de 50 cm. Un pequeño agujero redondo en el fondo tiene un diámetro de 1 cm. Determine $A(h)$ y a, luego resuelva la ecuación diferencial $A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}.$ describiendo así en forma explícita la altura del agua en función del tiempo.
d. Use la solución de (c) para predecir el tiempo que tardará el tanque en vaciarse completamente.
e. ¿Qué se vaciará más rápido, el tanque con el agujero (el tanque del gráfico) o un tanque cónico invertido con las mismas dimensiones, que se drena a través de un agujero del mismo tamaño? ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse el tanque invertido?
f. Busque un tanque de agua y calcule el tiempo que tarda en vaciarse. (Puede usar un recipiente grande) El tanque debe ser lo bastante grande como para tardar varios minutos en vaciarse,

y el agujero de drenado debe ser lo bastante grande como para que el agua fluya con libertad. La parte superior del tanque debe estar abierta (de modo que el agua no “succione”). Repita los pasos c) y d) para su tanque y compare la predicción de la ley de Torricelli con sus resultados experimentales.

Referencias

a. Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemática y Mathcad.*
b. MATEMÁTICAS AVANADAS PARA INGENIERIA. Dennis G. Zill, Warren Wright. CUARTA EDICIÓN. Editorial Mc Hall Hill.
c. ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas e la frontera. DENNIS G. ZILL, Novena edición. CENGAGE.