PROYECTO No. 1

Secciones K, P, U, X, y Z

Fecha de entrega: miércoles 24 de marzo de 2021

Introducción:

Este proyecto tiene como objetivo familiarizar al estudiante del curso Matemática básica 1 con el uso de un sistema algebraico por computadora en la solución de problemas algebraicos. Entre los programas que pueden ser utilizados para este propósito están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, MatLab, GeoGebra y Python. El estudiante puede utilizar el programa que considere conveniente.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este proyecto se presentan en tres problemas. En el primero de ellos se aborda la solución de ecuaciones utilizando métodos gráficos y métodos computacionales. En el segundo problema el estudiante debe utilizar sus conocimientos de precálculo así como la tecnología para resolver un problema de modelado usando una función por partes. En el tercer y último problema se aborda un problema de geometría analítica, que permitirá al estudiante familiarizarse con algunas de las situaciones que abordará al estudiar el cálculo. El proyecto deberá realizarse en parejas.

Problema 1: Solución de ecuaciones

Una ecuación con una incógnita de la forma

$$f(x) = g(x)$$

Puede resolverse en forma aproximada utilizando el procedimiento siguiente:

1. Exprese la ecuación en la forma $F(x) = f(x) - g(x) = 0$
2. Dibuje la representación gráfica de la función $F(x)$
3. Las soluciones de la ecuación se encuentran en los valores en donde la gráfica interseca al eje x. Para encontrar estos valores con la precisión requerida pueden hacerse ampliaciones sucesivas en los puntos de intersección, hasta que tengamos la solución con tantos decimales como sea necesario.

Para las ecuaciones dadas:

i) Utilice el procedimiento descrito para encontrar las soluciones de cada ecuación con al menos dos decimales exactos.

ii) Encuentre las soluciones exactas de las ecuaciones utilizando los comandos apropiados del programa de cómputo utilizado.

1.1 $x^7 = 2x + 6$

1.2 $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 6} - \sqrt[5]{x + 7} = 2$

1.3 $x^3 = 2 - 4\sqrt{x^2 + 6x - 5}$

1.4 $|x - 1| + |x - 3| + |x + 1| + |x + 3| = 12$

1.5 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones dibujando en el mismo sistema de coordenadas las representaciones gráficas de las ecuaciones y luego haciendo aproximaciones hasta obtener las coordenadas aproximadamente exactas de los puntos de intersección.

$$x^3 + 3y^2\sqrt{x} - 3 = 5x^2$$
$$4(x - 5)^2 + y^2 = 25$$

Problema 2: Modelado de una función por partes.

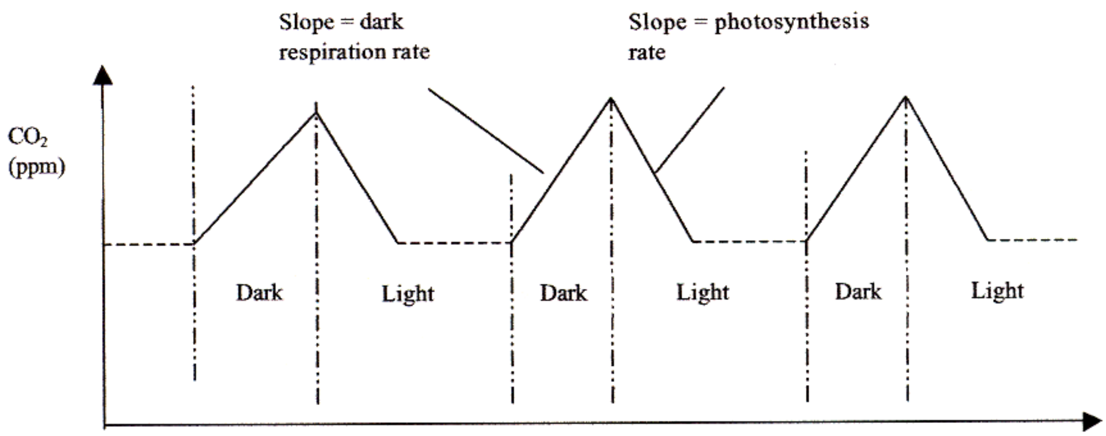
La tabla siguiente contiene las concentraciones de Anhídrido carbónico CO_2, obtenidas durante el crecimiento de plantas de trigo en la Cámara de Producción de Biomasa. Los resultados en partes por millón (ppm) han sido tabulados para un período de 3 días. Los datos en la parte sombreada corresponden a ciclos oscuros de 4 horas durante los cuales la iluminación ha sido suprimida.

Time (in hrs)	CO_2 (ppm)	Time (in hrs)	CO_2 (ppm)	Time (in hrs)	CO_2 (ppm)
1	1040	25	1040	49	1030
2	1050	26	1040	50	1030
3	1040	27	1040	51	1030
4	1040	28	1040	52	1030
5	1040	29	1040	53	1030
6	1040	30	1040	54	1030
7	1040	31	1000	55	1040
8	1050	32	1040	56	1030
9	1180	33	1160	57	1160
10	1340	34	1320	58	1320
11	1500	35	1480	59	1480
12	1640	36	1620	60	1620
13	1520	37	1490	61	1500
14	1280	38	1260	62	1240
15	1100	39	1040	63	1040
16	1020	40	1030	64	1030
17	1020	41	1020	65	1030
18	1020	42	1020	66	1030
19	1050	43	1030	67	1040
20	1050	44	1030	68	1030
21	1050	45	1030	69	1040
22	1050	46	1030	70	1040
23	1050	47	1030	71	1040
24	1050	48	1030	72	1040

3.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar una representación gráfica de los datos.

3.2 Utilice la opción "Fit" (o ajustar) de su programa de cómputo. Experimente con polinomios de diferentes grados para tratar de determinar una función que modele los datos. Dibuje la representación gráfica de los datos y de los modelos obtenidos. ¿Qué modelo parece ajustar mejor los datos?

3.3 Usted puede pensar que una función que se ajusta mejor a los datos es una función compuesta de varias fórmulas, como se muestra en la gráfica siguiente.



3.4 Utilice el comando Fit de su programa, únicamente con los datos que se pueden ajustar a una recta horizontal. Obtenga la ecuación de la recta horizontal.

3.5 Durante los ciclos oscuros aumenta la concentración de CO_2 en la cámara. Estos incrementos en la concentración pueden ser modelados utilizando tres funciones lineales. Obtenga las ecuaciones de las tres funciones lineales que describan el incremento de concentración de CO_2 durante los ciclos oscuros. ¿Qué significado tiene la pendiente de estas rectas?

3.6 Obtenga tres ecuaciones lineales que describan el decaimiento en la concentración de CO_2 durante los periodos inmediatamente siguientes a los ciclos oscuros, cuando las plantas utilizan el dióxido de carbono para la fotosíntesis. ¿Cuál es el significado de la pendiente de estas rectas?

3.7 Escriba la fórmula de la función por partes que describe la concentración de CO_2 en la cámara durante los tres días que duró el experimento.

3.8 Dibuje la representación gráfica de la función obtenida en el inciso anterior.

Problema 3: Recta y ecuación del círculo

3.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar la gráfica del círculo $x^2 + (y+1)^2 = 9$

3.2 Existen dos rectas tangentes al círculo, que pasan por el punto $(0,5)$. Estime algunos valores para las pendientes de éstas rectas y dibuje sus representaciones gráficas en el mismo plano que el círculo.

3.3 Para encontrar el valor exacto de la pendiente de éstas tangentes se requiere utilizar cálculo diferencial, sin embargo, es posible encontrar su valor exacto siguiendo el siguiente procedimiento algebraico.

3.4 Exprese la ecuación de la tangente en la forma $y = mx + b$, en donde el valor de m es desconocido y el valor de b es conocido.

3.5 Resuelva el sistema de ecuaciones formado por la recta tangente y la ecuación del círculo

$$x^2 + (y+1)^2 = 9$$
$$y = mx + b$$

3.6 Despeje x en términos de m en sistema de ecuaciones anterior utilizando la fórmula cuadrática.

3.7 Como la tangente y el círculo se intersecan en un solo punto, la ecuación cuadrática debe tener solución única y por lo tanto el discriminante de la misma debe ser cero; iguale a cero el discriminante y despeje el valor de m.

3.8 Compare los valores exactos de m con los valores estimados en m en el inciso 2.2. Dibuje la gráfica del círculo y de las dos rectas tangentes en un mismo plano de coordenadas.

Referencias

[1] Edwards y Penney. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Séptima edición, Pearson-Prentice Hall.

[2] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemática Básica 1.* Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.

[3] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo.* Octava edición. Cengage Learning.

[4] Saquimux J. *Geometría de Precálculo*.