PROYECTO No.1

Entrega: miércoles 24 de marzo de 2021

Introducción:

El desarrollo de la tecnología en el área de las computadoras y las calculadoras con capacidades numéricas, simbólicas y de graficación; ha influido en las metodologías utilizadas en los procesos enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Esto se debe en parte a que los Sistemas Algebraicos por Computadora (SAC) permiten visualizar todo tipo de gráficas y realizar una amplia variedad de cálculos que hace apenas algunos años era imposible. Los profesores del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, conocedores de esta realidad hemos impulsado el uso de las nuevas tecnologías a través del taller de matemática y proyectos grupo. Esperamos que los estudiantes hagan el esfuerzo que les corresponde con el objetivo de obtener una formación integral.

Objetivos:

Uno de los objetivos de este proyecto es que el estudiante utilice los sistemas algebraicos asistidos por computadora en la solución de problemas de cálculo diferencial e integral. El segundo objetivo es fomentar el trabajo en equipo en la solución de problemas, específicamente en el área de matemática.

Instrucciones:

1. El proyecto será desarrollado en grupos de dos estudiantes.
2. Cuando se requiera, los problemas serán resueltos utilizando un SAC. Se recomienda utilizar *Mathematica, Scientific Notebook, MatLab o GeoGebra*.
3. El informe debe ser presentado en formato digital, utilizando un procesador de texto y cuando el informe contenga gráficas, estás deben obtenerse por medio de un SAC. En ningún caso debe incluir contenido elaborado a mano.
4. El contenido del informe debe incluir al menos: introducción, objetivos, solución de los problemas, conclusiones, referencias.

Problema No. 1: Cálculo de límites

En este problema se utiliza una computadora para el análisis numérico, gráfico y algebraico de los límites.

Análisis numérico

Suponga que queremos aproximar el valor del límite (si es que existe)

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Cuando x tiende al número a por la derecha podemos utilizar la serie de números

$$a+h,\ a+h^2,\ a+h^3,\cdots,\ a+h^n$$

donde h es un número pequeño, $0<h<1$. Por ejemplo, si $h=0.1$, obtenemos la siguiente serie de números que se aproximan a $x=a$ por la derecha

$$a+0.1,\ a+(0.1)^2,\ a+(0.1)^3,\cdots,\ a+(0.1)^n = a+0.1,\ a+0.01,\ a+0.001,\cdots,\ a+(0.1)^n$$

De la misma forma, para analizar el límite cuando x tiende a a por la izquierda podemos utilizar una serie de la forma

$$a-h,\ a-h^2,\ a-h^3,\cdots,\ a-h^n$$

si $h=0.1$ obtenemos

$$a-0.1,\ a-(0.1)^2,\ a-(0.1)^3,\cdots,\ a-(0.1)^n = a-0.1,\ a-0.01,\ a-0.001,\cdots,\ a-(0.1)^n$$

Para ilustrar este procedimiento, considera la función $f(x)=\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$, cuando $x\to 0^+$, con $h=0.2$, obtenemos la tabla numérica siguiente:

x	$f(x)$
0.2	0.0998
0.04	0.09996
0.008	0.09999
0.0016	0.10000
0.00032	0.10000
0.000064	0.10000

Estos resultados numéricos sugieren que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}=\frac{1}{10}$$

Análisis gráfico:

Una forma sencilla de calcular aproximadamente un límite utilizando la representación gráfica de la función consiste en hacer uno o más acercamientos de la gráfica en el valor de x en donde queremos calcular el límite. Mientras más acercamientos efectuemos, mejor será la estimación que hagamos.

Análisis algebraico:

La mayoría de programas de matemática tienen uno o más comandos para el cálculo exacto de límites. Consulte el instructivo del programa que está utilizando para obtener el comando apropiado que le permita calcular directamente un límite.

Ejercicios:

Para cada uno de los límites que se proponen a continuación:

a. Utilice su programa de cómputo para calcular aproximadamente los límites utilizando el análisis numérico descrito anteriormente. Deberá utilizar diferentes valores de h en cada problema y calcular el límite por la izquierda y por la derecha.

b. Calcule los límites gráficamente realizando al menos dos aproximaciones de la gráfica. Debe dejar constancia gráfica de sus aproximaciones.

c. Utilice su programa de cómputo para calcular el valor exacto de los límites.

d. Calcule el límite utilizando procedimientos algebraicos

1.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4x^2+5x}$

1.2 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

1.3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1-4x}{x^2}$

1.4 $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

Problema No. 2: Razones de cambio

Un depósito tiene la forma de un cono circular recto, con su base hacia arriba. El cono tiene un radio en la parte superior de 5 pies, una altura de 10 pies y en su interior contiene agua hasta una profundidad de 7 pies.

3.1 Si al depósito se introduce un cilindro circular recto sólido, de 2 pies de radio y 4 pies de altura, que desciende a una velocidad constante de 0.1 pie por segundo, determine si el depósito se rebalsa o bien si el cilindro primero se detiene al hacer contacto con el cono.

3.2 ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el cilindro hace contacto con el agua, hasta que se rebalsa o bien hace contacto con el cono, lo que ocurra primero?

3.3 Calcule la razón a la cual aumenta la altura del agua en el depósito, cuando el cilindro tiene exactamente 1 pie sumergido dentro del agua.

3.4 Calcule la razón a la cual aumenta la altura cuando han transcurrido 10 segundos desde que el cilindro hace contacto con el agua.

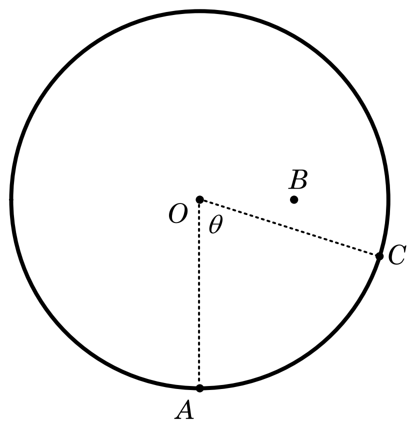
3.5 Suponga ahora que al mismo depósito se introduce un cono circular recto, de 8 pies de altura y 4 pies de radio. El cono desciende a una velocidad constante de 0.1 pies por segundo y con el vértice hacia abajo. Determine si el depósito se rebalsa y en cuánto tiempo ocurre esto.

3.6 Determine la razón a la cual aumenta la altura del agua en el depósito cuando el cono que desciende se ha sumergido 1 pie en el agua.

3.7 ¿Qué tan rápido aumenta la altura del agua cuando han transcurrido 10 segundos?

Problema 2: ¿Sabe cálculo el perro?

Un perro se encuentra junto a su amo en el punto A, en la orilla de una laguna circular de 50 metros de radio, como se muestra en la figura. El amo lanza una pelota al lago, la cual cae en el punto B, localizado 25 metros al este y 50 metros hacia el norte del punto A. Para alcanzar la pelota el perro corre por la orilla circular del lago hasta un punto C y seguidamente nada por el agua para alcanzar la pelota. El perro puede correr con una rapidez de 12 kilómetros por hora y nadar a una velocidad de 3 kilómetros por hora.



2.1 Haga un bosquejo de diferentes trayectorias que puede tomar el perro.

2.2 Calcule el tiempo que tarda el perro en alcanzar la pelota si todo el recorrido lo hace nadando.

2.3 Calcule el tiempo que tarda el perro en alcanzar la pelota, si se lanza al agua en un punto donde nade la menor distancia posible.

2.4 Obtenga una función que modele el tiempo total del recorrido del perro para cualquier ubicación del punto C, en términos del ángulo θ. Obtenga el dominio de esta función.

2.5 Dibuje la representación gráfica de la función y estime el tiempo mínimo del recorrido.

2.6 Utilice procedimientos algebraicos para obtener el tiempo mínimo. Utilice el método de Newton si es necesario para obtener los valores críticos.

Referencias

[1] Stewart J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas, sexta edición. Cengage Learning.

[2] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook* y *Mathematica.*

[3] Edwards y Penney. Cálculo con geometría analítica, cuarta edición. Prentice hall.

[4] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt

[5] http://matematicaenlinea.com