PROYECTO No.2

Secciones K, P, U, X, y Z

Fecha de entrega: lunes 27 de abril de 2020

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un sistema algebraico por computadora (SAC) en la solución de problemas que involucran modelado de funciones, funciones, funciones cuadráticas y funciones trigonométricas.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este laboratorio se presentan en tres problemas. En el primer problema se explora un método numérico para encontrar cualquier cero de un polinomio. En el segundo problema, se modela el decaimiento de una sustancia radioactiva con un experimento sencillo con monedas y funciones exponenciales. Finalmente, en el tercer problema, se analiza el uso de funciones trigonométricas para modelar el movimiento armónico simple.

Problema 1: Atrapando un cero

Hemos visto cómo encontrar los ceros de un polinomio algebraica y gráficamente. Trabajaremos ahora con un método numérico para encontrar los ceros. Con este método podemos encontrar el valor de cualquier cero real con tantos decimales como queramos.

El teorema del valor intermedio establece que si P es un polinomio y si $P(a)$ y $P(b)$ son de signos opuesto, entonces P tiene un cero entre a y b. El teorema del valor intermedio es un ejemplo de un teorema de existencia: nos dice que existe un cero, pero no nos dice exactamente dónde está. Sin embargo, podemos usar el teorema para "atrapar" al cero.

Por ejemplo, considere el polinomio $P\,(x) = x^3 + 8x - 30$.

a) Evalúe con un SAC, $P\,(2)$ y $P\,(3)$. ¿Existe un cambio de signo?
b) Ahora, evalúe P en intervalos de 0.1, (2.1, 2.2, 2.3, etc.) hasta encontrar el siguiente cambio de signo. Construya una tabla mostrando sus resultados. Trace la gráfica del polinomio en un SAC en un rectángulo de visión entre los dos valores en que encontró el cambio de signo.
c) Repita el procedimiento de (b) pero ahora con centésimas, es decir, si, por ejemplo, el cero apareció entre 2.2 y 2.3, construya una tabla en la que evalúe P en los puntos 2.21, 2.22, 2.23, etc., hasta encontrar el cambio de signo. Luego, trace nuevamente la gráfica de P en un rectángulo de visualización apropiado.
d) Indique cuál es el valor del cero de $P(x)$ entre 2 y 3 correcto hasta una centésima.

1) Repita el procedimiento anterior para hallar el cero de $P(x) = x^2 - 2$ que está entre 1 y 2, correcto hasta una décima (recuerde incluir los rectángulos de visualización de la gráfica de P, en este y los siguientes ejercicios).
2) Con el mismo procedimiento, encuentre el mismo cero de (1), correcto hasta una centésima.
3) Explique por qué el valor encontrado es una aproximación de $\sqrt{2}$.

4) Repita una vez más el procedimiento para encontrar el valor del cero correcto hasta una milésima.
5) Use un SAC para encontrar el valor del cero de $P(x)$, resolviendo la ecuación $P(x) = 0$.
6) Encuentre un polinomio que tenga $\sqrt[3]{5}$ como uno de sus ceros. Use el método aquí descrito para encontrar el valor de $\sqrt[3]{5}$ correcto hasta 4 decimales. Compruebe su respuesta usando un SAC.
7) Encuentre los ceros irracionales indicados en el siguiente polinomio, por el método descrito arriba, correcto hasta dos decimales:
   a) El cero positivo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$
   b) El cero negativo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

Problema 2: Modelado del decaimiento radioactivo con monedas

En este experimento, lanzamos centavos para simular la descomposición de los átomos en una sustancia radiactiva.

Necesitará:

- 40 centavos (o monedas de 5, 10, 25 centavos o Q 1, lo importante es que todas sean de la misma denominación)
- Una taza o frasco
- Una mesa

Procedimiento:

a) Ponga los centavos en una taza y agítelos bien, luego tírelos sobre una mesa. Los centavos que muestran cara se consideran "decaídos", y los que muestran escudo todavía son "radioactivos".
b) Descarte los centavos en descomposición y recoja los radioactivos. Registre el número de centavos radioactivos restantes (en la tabla siguiente).
c) Repita los pasos 1 y 2 con los centavos radiactivos restantes hasta que todos los centavos hayan decaído.

Número de lanzamientos, x	**Centavos restantes, $f(x)$**	**Razón de cambio, $\frac{f(x+1)}{f(x)}$**
0	40	--
1		
2		
3		
4		
⋮		

Análisis:

a) ¿Es apropiado un modelo exponencial para los datos que obtuvo? Para decidir, complete la columna "razón de cambio" en la tabla para determinar si hay un "factor de decaimiento" razonablemente constante. Por ejemplo, suponga que en el primer lanzamiento obtuvo 22 escudos (radioactivos). Entonces, la razón de cambio sería $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{22}{40} = 0.55$. Si las razones de cambio de los siguientes intentos se mantienen cerca de ese valor, significa que el modelo exponencial es apropiado para representar este fenómeno.

b) Luego de completar la tabla, use un SAC para localizar los puntos obtenidos en el experimento. ¿Parece la curva ajustarse a un modelo exponencial?

c) Use un SAC para obtener el modelo exponencial del tipo $f(x) = ab^x$ que se ajuste mejor a los datos obtenidos en el experimento.

d) ¿Cuál es el factor de decaimiento del modelo que encontró en el inciso anterior?

e) ¿Es el factor de descomposición lo que deberíamos esperar al lanzar monedas? Justifique su respuesta.

Problema 3: Funciones armónicas simples

Al resolver cierta clase de problemas matemáticos avanzados (problemas que tienen que ver con circuitos eléctricos, sistemas de masa-resorte, flujo de calor, etc.), el proceso de solución conduce de manera natural a una función de la forma

(1) $$y = M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt$$

Al desarrollar este problema el estudiante mostrará que la ecuación anterior se puede representar como una ecuación de la forma

(2) $$y = A \operatorname{sen}(Bt + C)$$

a) Utilice su programa de cómputo para explorar el comportamiento de la gráfica de le ecuación (1) para algunos valores de M, N y B. ¿Las gráficas obtenidas, parecen ser de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bt + C)$? Explique.

b) Dibuje la representación gráfica de la ecuación $y = 2\operatorname{sen}(\pi t) - 3\cos(\pi t)$. Haciendo las ampliaciones necesarias obtenga los valores de A, B y C y luego construya la ecuación de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bt + C)$. Dibuje en una misma pantalla Las representaciones gráficas de las dos funciones. ¿Son aproximadamente iguales? Explique.

c) El problema ahora es: dados M, N y B en la ecuación (1), encuentre A, B y C para construir la ecuación (2), de manera que ésta produzca la misma gráfica que la anterior. En general es preferible la ecuación (2) ya que de ella se puede leer fácilmente la amplitud, periodo y desplazamiento de fase. El proceso para encontrar A, B y C, dados M, N y B no es fácil y se requiere mucho ingenio y el uso de la fórmula

(3) $$sen(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

Demuestre que la identidad de transformación es

$$y = M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \sqrt{M^2 + N^2}\ \operatorname{sen}(Bt + C) \tag{4}$$

donde C es cualquier ángulo que tiene al punto $P(M, N)$ como lado terminal, es decir que C puede ser cualquier ángulo con el mismo lado terminal de $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{N}{M}\right)$.

Sugerencia: un primer paso es el siguiente

$$M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M^2 + N^2}}\left(M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt\right)$$

d) Utilice la identidad de transformación dada en la ecuación (4) para transformar la ecuación

$$y_1 = -4 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

a la forma $y_2 = A \operatorname{sen}(Bt + C)$ donde C se escoge de manera que $|C|$ sea mínima. Calcule C hasta con 3 cifras decimales. A partir de la nueva ecuación determine la amplitud, período y desplazamiento de fase.

e) Dibuje las representaciones gráficas de y_1 y y_2 del inciso anterior en un mismo rectángulo de visualización.

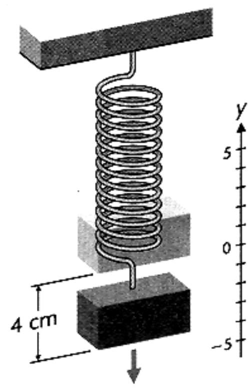
f) **Aplicación a la física.** Se suspende un resorte, con una constante del resorte de 64, se jala 4 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y después se le da un empuje hacia abajo para producir una velocidad inicial hacia abajo de 24 centímetros por segundo. En matemáticas más avanzadas (ecuaciones diferenciales) se encuentra que la ecuación de movimiento, despreciando la resistencia del aire y la fricción, está dada de manera aproximada por la ecuación

$$y = -3 \operatorname{sen}(8t) - 4\cos(8t)$$

donde y_1 es la posición del peso W en la parte inferior de la escala en el tiempo t (véase la figura). y está en centímetros y t en segundos. Obtenga una ecuación de la forma

$$y = A\,\mathrm{sen}(Bt + C)$$

Dibuje la representación gráfica de las dos ecuaciones anteriores en un mismo rectángulo de visualización para $0 \le t \le 6$. ¿Cuántas veces pasara el objeto por $y = 2$ en los 6 primeros segundos? Encuentre los valores de t para los cuales $y = 2$, si $0 \le t \le 6$.



Referencias

[1] Edwards y Penney. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Séptima edición, Pearson-Prentice Hall.

[2] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemática Básica 1*. Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.

[3] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo*. Octava edición. Cengage Learning.

[4] Saquimux J. *Geometría de Precálculo*.