PROYECTO No.2

Fecha de entrega: lunes 26 de octubre 2020

Introducción:

Continuando con el desarrollo de las actividades del curso MB1, se presenta a los estudiantes el contenido del proyecto 2. Al resolver los problemas propuestos, el estudiante utilizará un sistema algebraico por computadora (SAC) en la solución de problemas que involucran modelado de funciones, funciones, funciones cuadráticas y funciones trigonométricas.

Las actividades que el estudiante debe desarrollar en este laboratorio se presentan en tres problemas. En el primer problema se explora gráficamente el comportamiento de las funciones racionales. En el segundo problema, se aplican funciones trigonométricas inversas en el diseño de lentes para cámaras fotográficas digitales. Finalmente, en el tercer problema, se analiza el diseño de puentes cuyos perfiles tienen la forma de secciones cónicas, y luego se elegirá al puente más apropiado de acuerdo con los requerimientos del proyecto.

Problema 1: Funciones Racionales

Una función racional se define como

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$

1. Las asíntotas horizontales de una función racional están muy relacionadas con el grado de los polinomios

$P(x)$ y $Q(x)$. Para observar gráficamente el hecho anterior, en cada caso, dibuje las representaciones gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo rectángulo de visualización

Caso 1: $f(x) = \frac{2x+7}{x^2+x+6}$, $g(x) = \frac{2}{x}$

Caso 2: $f(x) = \frac{2x^2+7}{x^2+x+6}$, $g(x) = 2$

Caso 3: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^2+x+6}$, $g(x) = 2x$

Observe detenidamente cada una de las representaciones gráficas construidas y escriba un pequeño párrafo en donde explique sus observaciones.

2. Las asíntotas verticales de una función racional están muy relacionadas con las raíces del denominador. Utilizando su programa de cómputo dibuje la representación gráfica de las siguientes funciones racionales.

2.1 $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x-15}$ 2.2 $f(x) = \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-4)}$

En cada caso indique cuales son las asíntotas verticales. Explique por qué en algunos casos las asíntotas verticales coinciden con los ceros del denominador mientras que en otros casos no ocurre lo mismo.

3. El comportamiento final de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ está relacionado con el cociente que resulta de dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$.

a) Utilice su programa de cómputo para dividir los polinomios y expresar las funciones polinomiales dadas en la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ que se obtienen al efectuar la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

b) En un mismo rectángulo dibuje la representación gráfica de la función $f(x)$ y la del cociente$C(x)$. Explique lo que ocurre con el comportamiento final de la función racional en cada caso.

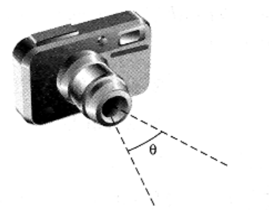
3.1 $f(x) = \frac{4x^2}{x^2-7x+10}$ 3.2 $f(x) = \frac{2x^2-5x}{2x+3}$ 3.3 $f(x) = \frac{x^4-3x^3-3x+3}{x^2-3x}$

Problema 2: Fotografía

El ángulo de visión cambia con la longitud focal de lente de la cámara fotográfica. Un lente gran angular de 28 mm tiene un ángulo de visión ancho, y un lente de telefoto de 300 mm tiene ángulo de visión estrecho. Para una cámara digital, el ángulo de visión θ, en grados, está dado por

$$\theta = 2\,tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$$

donde x es la longitud focal del lente que se usa.



3.1 Utilice su programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de la función anterior para lentes entre 10 mm a 100 mm.

3.2 Utilice la gráfica anterior para aproximar con dos cifras decimales el ángulo de visión para un lente de 28 mm.

3.3 Graficando $\theta = 40°$ y $\theta = 2\,tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$ en una misma pantalla, aproxime con dos cifras decimales la longitud del lente que permite tener un ángulo de visión de 40°. Para ello encuentre el punto de intersección de las gráficas y realice las aproximaciones necesarias.

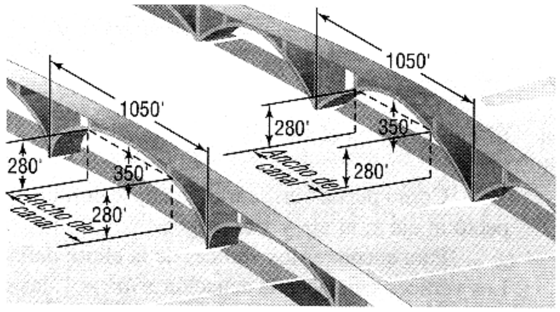
3.4 Utilice su programa de cómputo para resolver la ecuación $40 = 2\,tan^{-1}\left(\frac{21.634}{x}\right)$. ¿Coincide el valor exacto con el valor aproximado que obtuvo en el inciso anterior? De no ser así explique y haga las correcciones necesarias para que los resultados sean aproximadamente los mismos.

3.5 Grafique la función de modo que la gráfica cubra lentes de 100 mm a 1000 mm. Utilice la gráfica para aproximar la longitud focal del lente que podría tener un ángulo de visualización de 10°.

Problema 3: Construcción de un puente

Su grupo tiene que analizar dos proyectos de construcción para un nuevo puente sobre un río. El espacio entre los dos soportes del puente será de 1050 pies y la altura en el centro del arco será de 350 pies. Una compañía constructora ha sugerido que la estructura tenga la forma de una elipse, mientras que la otra empresa que ofrece la construcción del puente propone que el arco tenga forma de una parábola. El trabajo de su grupo consiste en elegir el proyecto más apropiado.

Un barco petrolero necesita un espacio de 280 pies de altura para poder circular sin dificultad por debajo del puente.



1.1 Eligiendo el origen del sistema de coordenadas rectangulares en el mismo lugar para ambos casos, encuentre las ecuaciones de la elipse y la parábola para cada propuesta.

1.2 Dibuje en un mismo rectángulo de visualización las representaciones gráficas de la parábola y la elipse. Observando las gráficas, ¿Qué diseño le parece más apropiado? Explique.

1.3 En cada propuesta, calcule el mayor ancho de un barco que pueda pasar por debajo del canal. Según este otro punto de vista. ¿Qué diseño le parece más apropiado? Explique.

1.4 Durante la época lluviosa el río aumenta su altura. De estudios anteriores se sabe que cuando mucho la altura se elevará 10 pies. Considerando este último aspecto, ¿Qué diseño resulta más apropiado? Explique. ¿Cuál será ahora el mayor ancho del barco que puede pasar bajo el puente en cada diseño?

Referencias

[1] Edwards y Penney. *Cálculo Con Geometría Analítica*. Séptima edición, Pearson-Prentice Hall.

[2] Castillo Miguel. *Instructivo para el Taller de Matemática Básica 1.* Segunda edición, Editorial Estudiantil Fenix.

[3] Stewart J. Redlin L. Watson S. *Precálculo.* Octava edición. Cengage Learning.

[4] Saquimux J. *Geometría de Precálculo*.