***Proyecto 2***

Fecha de entrega: martes 5 de abril de 2022

**Introducción:**

El desarrollo de proyectos debe realizarse en parejas o individual, según le indique su profesor. Es importante en la formación de los estudiantes ya que le permite, hacer uso de tecnología para su solución.

Para resolver los problemas, cada estudiante debe realizar un análisis matemático así como realizar los cálculos utilizando el software que considere conveniente. Entre los programas que puede utilizar están: Scientific Notebook, Mathematica, Maple, derive, Mathlab, etc.

El informe debe ser presentado utilizando un procesador de textos, en cuyo caso deben importarse los resultados del programa matemático o bien editando completamente el informe con el editor que incluyen algunos programas como Scientific Notebook, Mathematica y Maple.

**Problema 1: Ecuaciones polares de las cónicas**

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base a enormes cantidades de datos astronómicos, publicó tres leyes del movimiento planetario, de estas, mencionaremos solamente la primera:

**Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el sol en un foco.**

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, aplican bien al movimiento de cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse, en términos de su excentricidad $e$ y su semieje mayor $a$. Se puede escribir la distancia $a$ del foco a la directriz en términos de $a$ si usa:

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{\left(1-e^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2\left(1-e^2\right)^2}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a\left(1-e^2\right)}{e}$$

Entonces $ed = a(1-e^2)$, si la directriz es $x = d$.

Entonces la ecuación polar de una elipse con foco en el origen con semieje mayor $a$ y excentricidad $e$ es:

$$r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$$

Las posiciones, más cercana y más lejana de un planeta al Sol, se denominan **perihelio y afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse.

Las distancias anteriores están dadas por:

**Al perihelio:** $a(1-e)$

**Al afelio:** $a(1+e)$

**a.** Utilice un programa de cómputo que tenga la capacidad de dibujar gráficas en coordenadas polares. Para $0 < e < 1$, dibuje simultáneamente las representaciones gráficas para los valores de $e = 0.2, 0.3, 0.7$ manteniendo $d$ fijo en $d = 4$

**b.** Luego dibuje simultáneamente una representación gráfica manteniendo $e$ fijo en $e = 0.6$ y haciendo variar $d$ en $d = 3, 4, 8.$ Explique los resultados obtenidos en ambas gráficas. ¿Qué cónica se produce?

**c.** Para $e = 1,$ dibuje simultáneamente cuando se hace variar el valor de $d = 1, 4, 8.$ ¿Qué cónica se obtiene?

**d.** Para $e>1.$ Dibuje Simultáneamente la representación gráfica para los valores de $e=2,4,8,$ manteniendo $d$ fijo en $d=6$

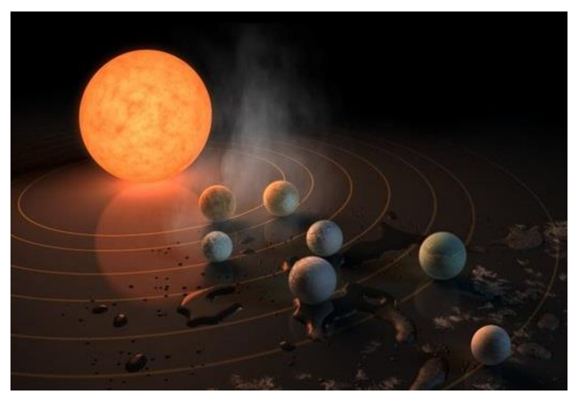
**e.** Dibuje simultáneamente la representación gráfica para los valores de $d=2,4,7.$ y manteniendo $e$ fijo en $e=4$ ¿Qué cónica se obtiene?

**f.** Explique claramente. ¿Cómo cambia la gráfica al variar los valores de $e$ y de $d$?

Los datos de la tabla siguiente le servirán para efectuar los incisos que se presentan a continuación, en todos los casos el eje polar interseca con la órbita del exoplaneta en el perihelio.

| **Planetas enanos** | **Excentricidad e** | **Semieje mayor (unidades astronómicas)** |
|---|---|---|
| b | 0.081 | 1.73 millones de kilómetros |
| c | 0.083 | 2.37 millones de kilómetros |
| d | 0.070 | 3.33 millones de kilómetros |
| e | 0.085 | 4.38 millones de kilómetros |
| f | 0.063 | 5.76 millones de kilómetros |
| g | 0.061 | 7.01 millones de kilómetros |
| h | 0.086 | 9.27 millones de kilómetros |

**g.** Encuentre una ecuación para las órbitas de todos los planetas que orbitan alrededor de la estrella **TRAPPIST-1**, también conocida como **2MASS J23062928-0502285**, la cual es una estrella enana ultra-fría localizada a 39,13 años luz (12,0 pc) en la constelación de Acuario.[1]



**h.** Dibuje simultáneamente las órbitas de los planetas de la tabla, escoja una escala de tal forma que se visualicen claramente todas las órbitas

**i.** Calcule los valores correspondientes del perihelio y el afelio de cada uno de los planetas de la tabla.

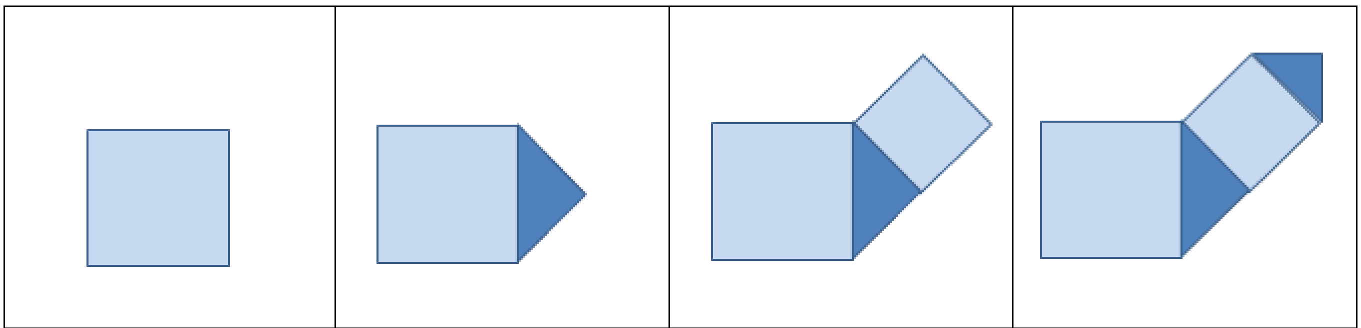
**j.** Calcule las distancias que se le indican para cada uno de los planetas de la estrella **TRAPPIST-1,**

Según el valor del ángulo $\theta$ indicado en la tabla.

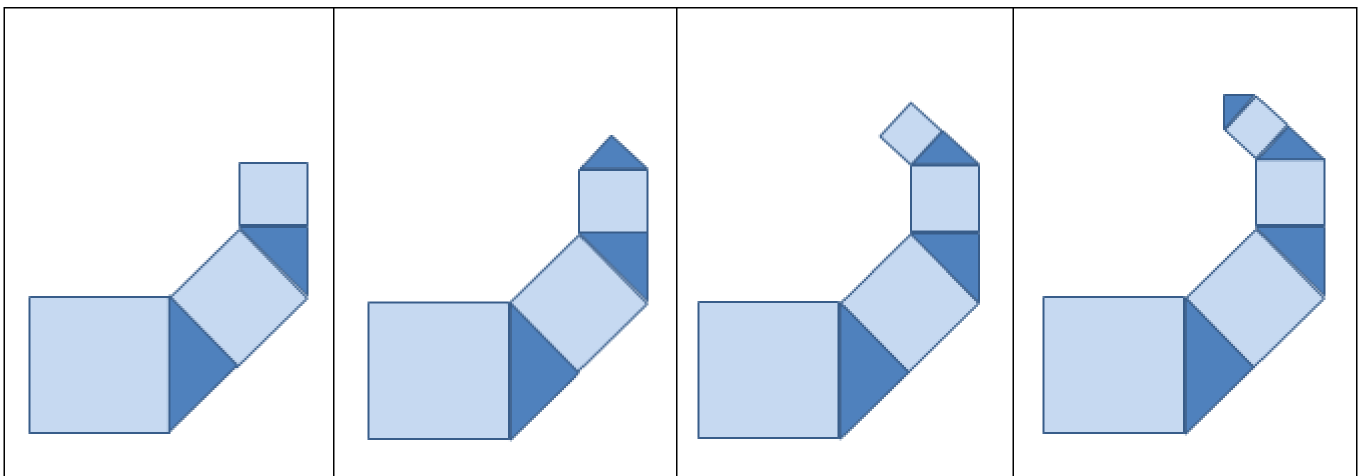
| **Planeta** | **Angulo** |
|---|---|
| b | $\theta=\frac{\pi}{12}$ |
| c | $\theta=\frac{\pi}{2}$ |
| d | $\theta=\frac{3\pi}{4}$ |
| e | $\theta=\frac{\pi}{3}$ |
| f | $\theta=\frac{5\pi}{6}$ |
| g | $\theta=\frac{3\pi}{2}$ |
| h | $\theta=\frac{5\pi}{4}$ |

## Problema 2: Series

Considere un cuadrado celeste (figura 1) de lado $\boldsymbol{L_0}$ al cual se le agrega un triángulo rectángulo isósceles azul (figura 2) de hipotenusa $\boldsymbol{L_0}$, se agrega un cuadrado celestel de lado igual al tamaño de los catetos des triángulo azul $\boldsymbol{L_1}$ (figura 3) en uno de los lados del cuadrado, se agrega un triángulo rectángulo isosceles de hipotenuda igual al lado del cuadrado anterior $\boldsymbol{L_1}$ (figura 4). A cada uno de los cuadrados celestes se le va agregando un triángulo azul y a cada triángulo azul. Se le va agreganfo un cuadrado celeste, el proceso anterior se repite hasta el infinito, como se muestra en los siguientes gráficos.



| | | | |
|---|---|---|---|
| Gráfico 1 | Gráfico 2 | Gráfico 3 | Gráfico 4 |



| | | | |
|---|---|---|---|
| Gráfico 5 | Gráfico 6 | Gráfico 7 | Gráfico 8 |

Tomando en cuenta el proceso anterior y sabiendo que $\boldsymbol{L_0}$ es la suma de los dígitos de los números de su o sus carnets, deben hacer lo siguiente:

a. Plantee una serie en función de $\boldsymbol{L_0}$ que calcule la suma del área de todos los cuadrados (área celeste).
b. Plantee una serie en función de $\boldsymbol{L_0}$ que calcule la suma del área de todos los triángulos (área azul).
c. Plantee una serie que calcule la suma de las hgipotenusas de todos los triángulos en función de $\boldsymbol{L_0}$.
d. Plantee una serie que calcule la suma de los perímetros de todos los cuadrados en función de $\boldsymbol{L_0}$.
e. Después de encontrar las series en cada uno de los incisos anteriores, sustituya el valor de $L_0$, y calcule el valor de la suma de cada una de las series encontradas.

**Nota: Recuerde que en su reporte, debe aparecer todo el proceso para encontrar cada una de las series en función de $\boldsymbol{L_0}$ ya que respuestas sin procedimiento, no tienen valor.**

**Referencias**

[1] James Stewart. CÁLCULO TRASCENDENTES TEMPRANAS, Octava edición. CENGAGE Learning.
[2] Cálculo Trascendentes tempranas. Denis G. Zill, Warren S. Wright. Mc Graw Hill, cuarta edición.
[3] Edwards y Penny. Cálculo con Geometría analítica, 4a edición, Editorial PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, S. A.

[4] Edwin J. Purcell y Dalle Varberg. Calculo con geometría analítica. PRENTICE HALL. Sexta edición.
[5] Castillo Miguel. Instructivo para el uso de los Programas *Scientific Notebook*, *Matemática y Mathcad*
[6] https://es.wikipedia.org/wiki/TRAPPIST-1
[7] http://mate.ingenieria-usac.edu.gt
[8] go.nasa.gov/2lvVN7G