UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-118-1-N-2-00-2019_sQ

CURSO:	Matemática Aplicada 1
SEMESTRE:	Segundo Semestre
CÓDIGO DEL CURSO:	118
TIPO DE EXAMEN:	Primer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	11 de septiembre de 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

Primer examen parcial

Tema 1: (25 puntos)

Encuentre la solución del siguiente problema con valores iniciales.

$$y'' - 10y' + 29y = 4te^{5t} \qquad \text{sujeto a} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4$$

Tema 2: (50 puntos)

Determine $f(t)$ o $F(s)$ utilizando los teoremas básicos: (Deje constancia de ***TODO*** su procedimiento e indique los teoremas utilizados). (10 puntos cada inciso).

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+5s+25}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+4)}\right\}$

c) $\mathcal{L}\{e^{4t}(3t-3)^2\}$ d) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 3t\}$

e) $\mathcal{L}\left\{e^{(a+b)t}h(t)\right\}$ donde $h(t)$ es una función que tiene transformada

Tema 3: (25 puntos) Utilice la definición de transformada de Laplace para calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 4 \\ 4 & si \quad 4 \le t \end{cases}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: (25 puntos)

Encuentre la solución del siguiente problema con valores iniciales.

$$y'' - 10y' + 29y = 4te^{5t} \qquad \text{sujeto a} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el teorema de la transformada de una derivada	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10\big(sY(s) - y(0)\big) + 29Y(s) = \dfrac{4}{(s-5)^2}$
2.	Se sustituyen los valores iniciales y se resuelve para $Y(s)$	$Y(s) = \dfrac{4 + 4(s-5)^2}{[(s-5)^2 + 4](s-5)^2} = \left\{\dfrac{4 + 4s^2}{(s^2+4)s^2}\right\}_{s\to s-5}$
3.	Se plantean las fracciones parciales	$\dfrac{4+4s^2}{(s^2+4)s^2} = \dfrac{As+B}{s^2+4} + \dfrac{C}{s} + \dfrac{D}{s^2}$
4.	Se resuelve para determinar las constantes	$Y(s) = \left\{\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{s^2+2^2} + \dfrac{1}{s^2}\right\}_{s\to s-5}$
5.	Se aplica transformada inversa	$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s) = \dfrac{3}{2}\dfrac{2}{s^2+2^2} + \dfrac{1}{s^2}\right\}_{s\to s-5}$ $y(t) = \left(\dfrac{3}{2}\sin 2t + t\right)e^{5t}$

RESPUESTA	$y(t) = \left(\dfrac{3}{2}\sin 2t + t\right)e^{5t}$

Tema 2: (50 puntos)

Determine $f(t)$ o $F(s)$ utilizando los teoremas básicos: (10 puntos cada inciso).

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+5s+25}\right\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se completa cuadrados	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{75}{4}}\right\}$

2.	Se separa la suma del numerador orientado a conseguir transformadas inversas directas	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}\right\}$
3.	Se aplica el teorema de traslación y se transforma inversamente	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{75}{4}}}\frac{\sqrt{\frac{75}{4}}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}\right\}$ $= e^{-\frac{5}{2}t}\left(\cos\sqrt{\frac{75}{4}}t-\frac{\sqrt{3}}{15}\sin\sqrt{\frac{75}{4}}t\right)$

RESPUESTA	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+5s+25}\right\} = e^{-\frac{5}{2}t}\left(\cos\sqrt{\frac{75}{4}}t-\frac{\sqrt{3}}{15}\sin\sqrt{\frac{75}{4}}t\right)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+4)}\right\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantean las fracciones parciales	$\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+4}$
2.	Se resuelve para determinar las constantes	$-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{2}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{17}{20}\frac{1}{(s+4)}$
3.	Se aplica transformada inversa	$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{2}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{17}{20}\frac{1}{(s+4)}\right\}$ $-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}e^{t}+\frac{17}{20}e^{-4t}$

RESPUESTA	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+4)}\right\} = -\frac{1}{4}+\frac{2}{5}e^{t}+\frac{17}{20}e^{-4t}$

c) $\mathcal{L}\{e^{4t}(3t-3)^2\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se expande la expresión	$\mathcal{L}\{e^{4t}(9t^2-18t+9)\}$
2.	Se aplica el teorema de traslación y se transforma la expresión	$\mathcal{L}\{e^{4t}(9t^2-18t+9)\}=\frac{18}{(s-4)^3}-\frac{18}{(s-4)^2}+\frac{9}{s-4}$

RESPUESTA	$\mathcal{L}\{e^{4t}(9t^2-18t+9)\}=\frac{18}{(s-4)^3}-\frac{18}{(s-4)^2}+\frac{9}{s-4}$

d) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 3t\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la identidad	$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 3t\}=\mathcal{L}\left\{e^{-t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6t\right)\right\}$
2.	Se aplica el teorema de traslación y se transforma la expresión	$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6t\right)\right\}=\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{2}*\frac{s+1}{(s+1)^2+36}$

RESPUESTA	$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 3t\}=\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{2}*\frac{s+1}{(s+1)^2+36}$

e) $\mathcal{L}\left\{e^{(a+b)t}h(t)\right\}$ donde $h(t)$ es una función que tiene transformada

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el teorema de traslación	$\mathcal{L}\{h(t)\}_{s\to s-(a+b)}$
2.	Se transforma la función	$\mathcal{L}\{h(t)\}_{s\to s-(a+b)}=H(s-a-b)$

RESPUESTA	$\mathcal{L}\left\{e^{(a+b)t}h(t)\right\}=H(s-a-b)$

<u>Tema 3: (25 puntos)</u> Utilice la definición de transformada de Laplace para calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 4 \\ 4 & si \quad 4 \le t \end{cases}$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se plantea la integral para la función dada, según la definición	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^4 te^{-st}dt + \int_4^\infty 4e^{-st}dt$
2.	Se resuelven las integrales	$F(s) = \left[\left(-\frac{t}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-st}\right]_0^4 - 4\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_4^\infty$
3.	Al evaluar el resultado se obtiene	$F(s) = -\frac{4e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{4e^{-4s}}{s}$
4.	Simplificando	$F(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-4s})$

RESPUESTA	$F(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-4s})$