UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-118-2-N-2-00-2019_sQ

CURSO:	Matemática Aplicada 1
SEMESTRE:	Segundo Semestre
CÓDIGO DEL CURSO:	118
TIPO DE EXAMEN:	Segundo Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	14 de octubre 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis González
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

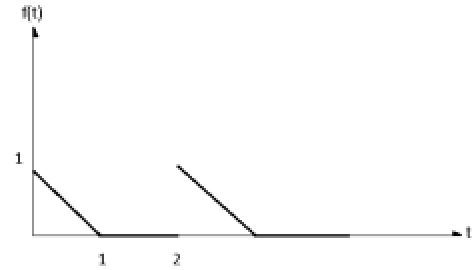
Universidad de San Carlos de Guatemala — **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería — **Matemática Aplicada 1**

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

INSTRUCCIONES:
Resuelva los temas que se le presentan a continuación, dejando los procedimientos necesarios para justificar sus respuestas, trabaje limpio y ordenado.

TEMA 1: (25 puntos):

Calcule la transformada de Laplace de la siguiente función periódica:



TEMA 2: (25 puntos):
Mediante la Transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial:

$$x'' + 4x' + 13x = g(t) \text{ sujeta a las condiciones } x(0) = 0 \;\; \& \;\; x'(0) = 4$$

Donde la función: $$g(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t < 5 \\ 5 & si \quad t \ge 5 \end{cases}$$

TEMA 4: (20 puntos):

Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial usando la transformada de Laplace:

$$y' + 10y + 25\int_0^t y(\tau)d\tau = 4 \qquad \text{sujeto a} \qquad y(0) = 2$$

TEMA 3: (30 puntos):
Encuentre la transformada o transformada inversa de las siguientes expresiones, indicando el o los teoremas utilizados para llegar a la respuesta:

a) $\mathcal{L}\left\{e^{2t}\int_0^t h(t-\tau)\cos(5\tau)\,d\tau\right\}$

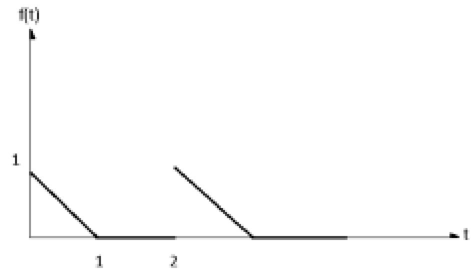
b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\}$ usando el teorema de Convolución.

c) $\mathcal{L}\{t^2\sin(3t)\}$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1: (25 puntos):

Calcule la transformada de Laplace de la siguiente función periódica:



No.	Explicación	Operatoria
1.	Se define la función por tramos para el primer período	$f(t)=\begin{cases} -t+1 & 0\le t<1 \\ 0 & 1\le t<2 \end{cases}$
2.	Según el teorema para la transformada de una función periódica	$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\left(\int_0^T e^{-st}f(t)dt\right)$
3.	Sustituyendo en 2. sabiendo que el periodo es $T=2$	$F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}(-t+1)dt+\int_1^2 e^{-st}(0)dt\right)$
4.	Integrando se obtiene	$F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left(\left[\left(\dfrac{t}{s}+\dfrac{1}{s^2}\right)e^{-st}-\dfrac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 + 0\right)$ $F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left(\dfrac{2}{s}+\dfrac{e^{-s}}{s^2}-\dfrac{e^{-s}}{s}-\dfrac{1}{s^2}\right)$

RESPUESTA	$F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-2s}}\left(\dfrac{2}{s}+\dfrac{e^{-s}}{s^2}-\dfrac{e^{-s}}{s}-\dfrac{1}{s^2}\right)$

TEMA 2: (25 puntos):
Mediante la Transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial:

$$x'' + 4x' + 13x = g(t) \text{ sujeta a las condiciones } x(0) = 0 \ \ \& \ \ x'(0) = 4$$

Donde la función: $g(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t < 5 \\ 5 & si \quad \quad t \ge 5 \end{cases}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se reescribe $g(t)$ en forma de escalón unitario	$g(t) = t - tU(t-5) + 5U(t-5)$ $g(t) = t + (5-t)U(t-5)$
2.	Transformando $g(t)$	$\mathcal{L}\{g(t) = t + (5-t)U(t-5)\}$ $G(s) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{5 - (t+5)\}e^{-5s}$ $G(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-5s}}{s^2}$
3.	Aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial	$\mathcal{L}\{x'' + 4x' + 13x = g(t)\}$ $s^2X(s) - 4 + 4sX(s) + 13X(s) = G(s)$ $s^2X(s) - 4 + 4sX(s) + 13X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-5s}}{s^2}$
4.	Resolviendo para $X(s)$	$X(s) = \frac{1 - e^{-5s} + 4s^2}{s^2(s^2+4s+13)}$
5.	Aplicando fracciones parciales a la expresión 4. y escribiendo $(s^2+4s+13)$ como $(s+2)^2+9$	$X(s) = \left(-\frac{4}{169}\frac{s}{(s+2)^2+9} - \frac{3}{169}\frac{1}{(s+2)^2+9} + \frac{4}{169s} - \frac{1}{13s^2}\right)e^{-5s} + \frac{4}{169}\frac{s}{(s+2)^2+9} + \frac{679}{169}\frac{1}{(s+2)^2+9} - \frac{4}{169s} + \frac{1}{13s^2}$
6.	Realizando arreglos a la expresión 5. para obtener transformadas directas resulta	$X(s) = \left(-\frac{4}{169}\frac{s+2-2}{(s+2)^2+9} - \frac{3}{169(3)}\frac{3}{(s+2)^2+9} + \frac{4}{169s} - \frac{1}{13s^2}\right)e^{-5s} + \frac{4}{169}\frac{s+2-2}{(s+2)^2+9} + \frac{679}{169(3)}\frac{3}{(s+2)^2+9} - \frac{4}{169s} + \frac{1}{13s^2}$

		$X(s)=\left(-\frac{4}{169}\frac{s+2}{(s+2)^2+9}-\frac{5}{507}\frac{3}{(s+2)^2+9}+\frac{4}{169s}-\frac{1}{13s^2}\right)e^{-5s}+\frac{4}{169}\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+\frac{671}{507}\frac{3}{(s+2)^2+9}-\frac{4}{169s}+\frac{1}{13s^2}$
7.	Aplicando transformada inversa y factorizando	$\mathcal{L}\left\{X(s)=\left(-\frac{4}{169}\frac{s+2}{(s+2)^2+9}-\frac{5}{507}\frac{3}{(s+2)^2+9}+\frac{4}{169s}-\frac{1}{13s^2}\right)e^{-5s}+\frac{4}{169}\frac{s+2}{(s+2)^2+9}+\frac{671}{507}\frac{3}{(s+2)^2+9}-\frac{4}{169s}+\frac{1}{13s^2}\right\}$ $x(t)=\left(-\frac{4}{169}e^{-2t}\cos 3t-\frac{5}{507}e^{-2t}\sin 3t+\frac{4}{169}-\frac{1}{13}t\right)_{t\to t-5}+\frac{4}{169}e^{-2t}\cos 3t+\frac{671}{507}e^{-2t}\sin 3t-\frac{4}{169}+\frac{1}{13}t$ $x(t)=\left[-\frac{4}{169}e^{-2(t-5)}\cos[3(t-5)]-\frac{5}{507}e^{-2(t-5)}\sin[3(t-5)]+\frac{4}{169}-\frac{1}{13}(t-5)\right]U(t-5)+\frac{4}{169}e^{-2t}\cos 3t+\frac{671}{507}e^{-2t}\sin 3t-\frac{4}{169}+\frac{1}{13}t$

RESPUESTA	$x(t) = \left[-\frac{4}{169}e^{-2(t-5)}\cos[3(t-5)] - \frac{5}{507}e^{-2(t-5)}\sin[3(t-5)] + \frac{4}{169} - \frac{1}{13}(t-5)\right]U(t-5) + \frac{4}{169}e^{-2t}\cos 3t + \frac{671}{507}e^{-2t}\sin 3t - \frac{4}{169} + \frac{1}{13}t$

TEMA 4: (20 puntos):

Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial usando la transformada de Laplace:

$$y' + 10y + 25\int_0^t y(\tau)d\tau = 4 \qquad \text{sujeto a} \qquad y(0) = 2$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica transformada de Laplace a la ecuación integro-diferencial con condiciones iniciales	$\mathcal{L}\left\{y' + 10y + 25\int_0^t y(\tau)d\tau = 4\right\}$ $sY(s) - 2 + 10Y(s) + 25\frac{Y(s)}{s} = \frac{4}{s}$
2.	Se resuelve para $X(s)$	$Y(s) = \frac{4+2s}{s^2+10s+25} = \frac{4+2s}{(s+5)^2}$
3.	Aplicando fracciones parciales	$X(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{6}{(s+5)^2}$
4.	Transformada inversa de $X(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{6}{(s+5)^2}\right\}$ $x(t) = 2e^{-5t} - 6te^{-5t}$

RESPUESTA	$x(t) = 2e^{-5t} - 6te^{-5t}$

TEMA 3: (30 puntos):
Encuentre la transformada o transformada inversa de las siguientes expresiones, indicando el o los teoremas utilizados para llegar a la respuesta:

a) $\mathcal{L}\left\{e^{2t}\int_0^t h(t-\tau)\cos(5\tau)\,d\tau\right\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Aplicando el teorema de convolución y el de traslación	$\mathcal{L}\left\{e^{2t}\int_0^t h(t-\tau)\cos(5\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{h(t)*\cos(5t)\}_{s\to s-2}$
2.	Transformando se obtiene	$\mathcal{L}\{e^{-t}*\cos(5t)\}_{s\to s-3} = \dfrac{(s-2)H(s-2)}{(s-2)^2+25}$

RESPUESTA	$\mathcal{L}\{e^{-t}*\cos(5t)\}_{s\to s-3} = \dfrac{(s-2)H(s-2)}{(s-2)^2+25}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\}$ usando el teorema de Convolución.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se define $F(s)$ y $G(s)$	$F(s) = \dfrac{1}{s^3}$ $G(s) = \dfrac{1}{s-1}$
2.	Aplicando transformada inversa a ambas expresiones	$f(t) = \dfrac{t^2}{2}$ $g(t) = e^t$
3.	Aplicando el teorema de convolución	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\} = \int_0^t e^{t-\tau}\dfrac{\tau^2}{2}\,d\tau$
4.	Resolviendo la integral	$\int_0^t e^{t-\tau}\dfrac{\tau^2}{2}\,d\tau = e^t - \dfrac{t^2}{2} - t - 1$

RESPUESTA	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s-1)}\right\} = e^t - \dfrac{t^2}{2} - t - 1$

c) $\mathcal{L}\{t^2 \sin(3t)\}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el teorema de la derivada de una transformada	$\mathcal{L}\{t^2 \sin(3t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$
2.	Al derivar se obtiene	$(-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-6s}{(s^2+9)^2}\right)$
3.	Al derivar de nuevo	$\frac{d}{ds}\left(\frac{-6s}{(s^2+9)^2}\right) = \frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3}$
4.		

RESPUESTA	$\mathcal{L}\{t^2 \sin(3t)\} = \frac{18(s^2-3)}{(s^2+9)^3}$