UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-118-3-N-2-00-2019_sQ

CURSO:	Matemática Aplicada 1
SEMESTRE:	Segundo Semestre
CÓDIGO DEL CURSO:	118
TIPO DE EXAMEN:	Tercer Examen Parcial
FECHA DE EXAMEN:	8 de noviembre 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis Gonzalez
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis Gonzalez
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

TERCER EXAMEN PARCIAL

INSTRUCCIONES:
Resuelva los temas que se le presentan a continuación, dejando los procedimientos necesarios para justificar sus respuestas, trabaje limpio y ordenado.

TEMA 1: (35 puntos):

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} X$$

TEMA 2: (35 puntos):

Un peso de 32 libras se suspende de un resorte y lo estira 2 pies, una fuerza externa se aplica al sistema equivalente $f(t) = 10t - 10tU(t-5)$ si el sistema se suelta desde el reposo y la posición de equilibrio, determine la ecuación de la posición de la masa, desprecie fuerza de amortiguamiento.

TEMA 3: (30 puntos):

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando el método de transformada de Laplace:

$$x' = 2y + e^{2t}$$

$$y' = 2x - e^{2t}$$

Sujeto a las condiciones:

$$x(0) = y(0) = 0$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

TEMA 1: (35 puntos):

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} X$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se calculan los valores propios del sistema con: $\lvert A-\lambda I\rvert = 0$	$\lvert A-\lambda I\rvert = 0$ $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$
2.	Calculando el determinante de la matriz e igualando a cero	$(-4-\lambda)(5-\lambda)(-3-\lambda) = 0$
3.	Cuyas soluciones son	$\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 5$ $\lambda_3 = -3$
4.	Se calculan los vectores propios con: $(A-\lambda I)k = 0$	Para $\lambda_1 = -4$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $k_1 + k_3 = 0$ $k_2 + 10k_2 = 0$ Suponer: $k_3 = 1$ $k_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Para $\lambda_2 = 5$:

		$$\begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$ $$k_1 - k_3 = 0$$ $$k_2 - 8k_3 = 0$$ Suponer: $k_3 = 1$ $$k_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Para $\lambda_3 = -3$: $$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $$-k_1 + k_2 + k_3 = 0$$ Suponer: $\begin{Bmatrix} k_2 = 1 \\ k_3 = 0 \end{Bmatrix}$ $$k_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
5.	Se plantea la solución general	$$\boldsymbol{X} = C_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

RESPUESTA	$$\boldsymbol{X} = C_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

TEMA 2: (35 puntos):

Un peso de 32 libras se suspende de un resorte y lo estira 2 pies, una fuerza externa se aplica al sistema equivalente $f(t) = 10t - 10tU(t-5)$ si el sistema se suelta desde el reposo y la posición de equilibrio, determine la ecuación de la posición de la masa, desprecie fuerza de amortiguamiento.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se interpreta la información del problema	$$mx'' + \beta x' + kx = f(t)$$ $$m = 1$$ $$\beta = 0$$ $$f(t) = 10t - 10tU(t-5)$$ $$32 = k(2)$$ $$k = 16$$

		Condiciones iniciales: $x(0) = 0$ $x'(0) = 0$
2.	Se aplica transformada de Laplace a la ecuación diferencial resultante	$\mathcal{L}\{x'' + 16x = 10t - 10tU(t-5)\}$ $s^2X(s) + 16X(s) = \frac{10}{s^2} - e^{-5s}\mathcal{L}\{10t + 50\}$ $X(s)(s^2+16) = \frac{10}{s^2} - e^{-5s}\left(\frac{10}{s^2} + \frac{50}{s}\right)$
3.	Resolviendo para $X(s)$ teniendo en cuenta las condiciones iniciales	$X(s) = \frac{10}{s^2(s^2+16)} - e^{-5s}\left(\frac{10+50s}{s^2(s^2+16)}\right)$
4.	Cambiando la expresión anterior a fracciones parciales	$X(s) = \frac{5}{8}\frac{1}{s^2} - \frac{5}{8(4)}\frac{(4)}{(s^2+16)}$ $- e^{-5}\left(-\frac{25}{8}\frac{s}{(s^2+16)} - \frac{5}{8(4)}\frac{(4)}{(s^2+16)}\right.$ $\left. + \frac{25}{8}\frac{1}{s} + \frac{5}{8}\frac{1}{s^2}\right)$
5.	Finalmente se aplica transformada inversa de Laplace	$\mathcal{L}\left\{X(s) = \frac{5}{8}\frac{1}{s^2} - \frac{5}{8(4)}\frac{(4)}{(s^2+16)}\right.$ $- e^{-5}\left(-\frac{25}{8}\frac{s}{(s^2+16)} - \frac{5}{8(4)}\frac{(4)}{(s^2+16)}\right.$ $\left.\left. + \frac{25}{8}\frac{1}{s} + \frac{5}{8}\frac{1}{s^2}\right)\right\}$ $x(t) = \frac{5}{8}t - \frac{5}{32}\sin 4t$ $- \left[-\frac{25}{8}\cos[4(t-5)] - \frac{5}{32}\sin[4(t-5)] + \frac{25}{8}\right.$ $\left. + \frac{5}{8}(t-5)\right]U(t-5)$

RESPUESTA	$x(t) = \frac{5}{8}t - \frac{5}{32}\sin 4t$ $- \left[-\frac{25}{8}\cos[4(t-5)] - \frac{5}{32}\sin[4(t-5)] + \frac{25}{8}\right.$ $\left. + \frac{5}{8}(t-5)\right]U(t-5)$

TEMA 3: (30 puntos):

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales usando el método de transformada de Laplace:

$$x' = 2y + e^{2t}$$

$$y' = 2x - e^{2t}$$

Sujeto a las condiciones:

$$x(0) = y(0) = 0$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica transformada de Laplace a la primera ecuación	$\mathcal{L}\{x' = 2y + e^{2t}\}$ $X(s)[s] + Y(s)[-2] = \frac{1}{s-2}$
2.	Se aplica transformada de Laplace a la segunda ecuación	$\mathcal{L}\{y' = 2x - e^{2t}\}$ $X(s)[-2] + Y(s)[s] = -\frac{1}{s-2}$
3.	Por el método de Cramer se determina las dos soluciones para el sistema	$\triangle = \begin{bmatrix} s & -2 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 - 4$ $\triangle_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & -2 \\ -\frac{1}{s-2} & s \end{bmatrix} = 1$ $\triangle_y = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{s-2} \\ -2 & -\frac{1}{s-2} \end{bmatrix} = -1$ Solución para $X(s)$: $X(s) = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{1}{s^2-4}$ Solución para $Y(s)$: $Y(s) = \frac{\triangle_y}{\triangle} = -\frac{1}{s^2-4}$
4.	Se aplica transformada inversa de	$\mathcal{L}\left\{X(s) = \frac{1}{s^2-4}\right\}$

	Laplace para ambas ecuaciones	$x(t) = \frac{1}{2}\sinh 2t$ $\mathcal{L}\left\{X(s) = -\frac{1}{s^2 - 4}\right\}$ $x(t) = -\frac{1}{2}\sinh 2t$

RESPUESTA	$x(t) = \frac{1}{2}\sinh 2t$ $x(t) = -\frac{1}{2}\sinh 2t$