UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-118-4-N-2-00-2019_sP

CURSO:	Matemática Aplicada 1
SEMESTRE:	Segundo Semestre
CÓDIGO DEL CURSO:	118
TIPO DE EXAMEN:	Examen Final
FECHA DE EXAMEN:	19 de noviembre 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis Gonzalez
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Marvin Antonio Donis Gonzalez
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González Díaz

EXAMEN FINAL

INSTRUCCIONES:
Resuelva los temas que se le presentan a continuación, dejando los procedimientos necesarios para justificar sus respuestas, trabaje limpio y ordenado.

TEMA 1: (20 puntos):
Dada $f(t) = \begin{Bmatrix} t & si & 0 \leq t < 2 \\ 1 & si & t > 2 \end{Bmatrix}$
Obtenga:
A) Gráfica (2 puntos)
B) Calcule $F(s)$ usando transformada de Laplace POR DEFINICIÓN. (9 puntos)
C) Exprese $f(t)$ con funciones escalón y luego calcule su transformada. (9 puntos)

TEMA 2: (20 puntos):
A) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{se^{-2s}}{(s-1)^2}$ (7 puntos)
B) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$ por transformada de integral (7 puntos)
C) Obtenga $F(s)$ si $f(t) = (te^t)^2$ por derivada de transformada (6 puntos)

TEMA 3: (20 puntos):
Un cuerpo de 64 libras se conecta al extremo de un resorte que cuelga del techo y lo alarga 0.32 pies. Al inicio el cuerpo se libera desde un punto que está 8 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 5 pies/seg.

TEMA 4: (20 puntos):
A) Usando valores y vectores propios, obtenga la solución general del sistema en la forma:

$$X(t) = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$\frac{dx}{dt} = x - 8y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 3y$$

B) La solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = 10x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x - 12y$$

En la forma $X(t) = C_1X_1 + C_2X_2$ es:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}$$

Los vectores X_1 y X_2 son:
i) ¿Linealmente independientes?
Sí/No (3 puntos)
ii) ¿Múltiplos entre sí?
Sí/No (2 puntos)

TEMA 5: (20 puntos):
Obtenga una solución en serie de potencias con una serie centrada en cero $(X_0 = 0)$ para la ecuación diferencial:

$$y' = xy$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

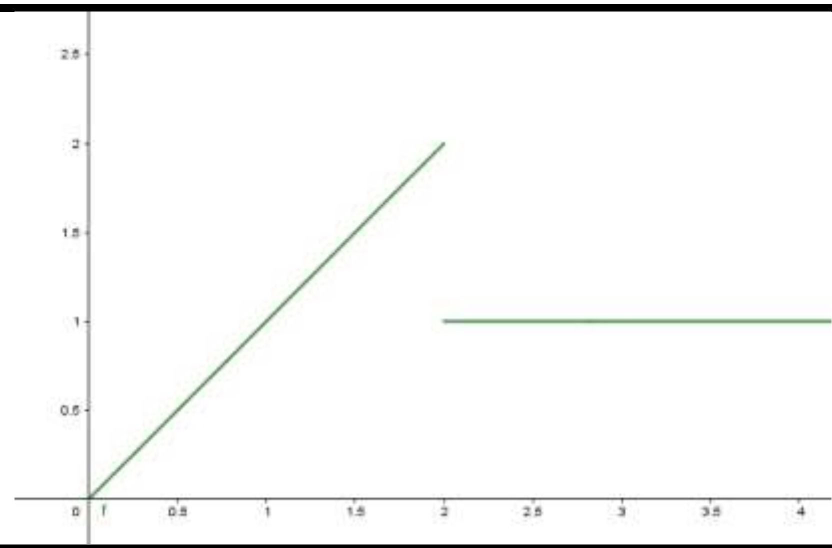
TEMA 1: (20 puntos):

Dada $f(t) = \begin{cases} t & si & 0 \le t < 2 \\ 1 & si & t > 2 \end{cases}$

Obtenga:

A) Gráfica (2 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafica sobre los intervalos especificados	$\begin{matrix} t & si & 0 \le t < 2 \\ 1 & si & t > 2 \end{matrix}$

RESPUESTA	

B) Calcule $F(s)$ usando transformada de Laplace POR DEFINICIÓN. (9 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Utilizando la transformada de Laplace por definición se plantea la integral	$F(s) = \int_0^2 te^{-st}dt + \int_2^\infty e^{-st}dt$
2.	Resolviendo la integral y evaluando los límites se tiene	$F(s) = -\frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}e^{-2s}$
3.	Simplificando	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

RESPUESTA	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

C) Exprese $f(t)$ con funciones escalón y luego calcule su transformada. (9 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Planteando $f(t)$ en escalón	$f(t) = t - tU(t-2) + U(t-2)$
2.	Aplicando transformada de Laplace	$\mathcal{L}\{f(t) = t - tU(t-2) + U(t-2)\}$ $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

RESPUESTA	$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s}$

TEMA 2: (20 puntos):

A) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{se^{-2s}}{(s-1)^2}$ (7 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica transformada inversa de Laplace tomando en cuenta la traslación	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2}\right\}U(t-2)$
2.	Se reescribe la expresión en fracciones parciales	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}\right\}U(t-2)$
3.	Se resuelve la transformada inversa de Laplace tomando en cuenta la traslación $s-1$	$f(t) = [(1-t)e^t]U(t-2)$
4.	Finalmente se escribe la traslación $t-2$	$f(t) = (1-t-2)e^{t-2}U(t-2)$ $f(t) = (t-1)e^{t-2}U(t-2)$

RESPUESTA	$f(t) = (t-1)e^{t-2}U(t-2)$

B) Obtenga $f(t)$ si $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$ por transformada de integral (7 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se separa la expresión por sus factores	$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+9)}$

2.	Se plantea la el teorema de convolución	$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+9)} = 1 * \frac{1}{3}\sin 3t$$
3.	En forma de integral	$$F(s) = 1 * \frac{1}{3}\sin 3t = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3\tau\, d\tau$$
4.	Resolviendo la integral	$$F(s) = \int_0^t \frac{1}{3}\sin 3\tau\, d\tau = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}$$

RESPUESTA	$$F(s) = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}$$

C) Obtenga $F(s)$ si $f(t) = (te^t)^2$ por derivada de transformada (6 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se opera el exponente	$$f(t) = t^2e^{2t}$$
2.	Se plantea la transformada por el teorema de la derivada de una transformada	$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$
3.	Transformando la expresión	$$F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$
4.	Finalmente se determina la segunda derivada de la expresión	$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

RESPUESTA	$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

TEMA 3: (20 puntos):

Un cuerpo de 64 libras se conecta al extremo de un resorte que cuelga del techo y lo alarga 0.32 pies. Al inicio el cuerpo se libera desde un punto que está 8 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 5 pies/seg.

No.	Explicación	Operatoria
1.	En primer lugar todos los datos deben estar en las mismas dimensionales, en este caso	$$m = \frac{64\ lb}{32} = 2\ slug$$ $$x(0) = -8\ pulg * \frac{1\text{ pie}}{12\ pulg} = -\frac{2}{3}\ pie$$

	para el sistema inglés. Realizando las conversiones necesarias.	$k = \frac{64\ lb}{0.32\ pies} = 200\ lb/pie$ $v_0 = x'(0) = 5\ pies/seg$
2.	Planteando la ecuación diferencial para el sistema de resorte.	$m\frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} + kx = 0$ $mx'' + kx = 0$
3.	Sustituyendo las constantes por los valores conocidos. Para las condiciones iniciales tomar en cuenta que x(0) corresponde a la posición inicial y x'(0) corresponde a la velocidad inicial.	$2x'' + 200x = 0$ $x(0) = -\frac{2}{3} \quad x'(0) = 5$
4.	Dividiendo toda la ecuación dentro de 2 para tener la constante de la derivada igual a 1	$2x'' + 200x = 0\ (\div 2)$ $x'' + 100x = 0$
5.	Aplicando la transformada.	$s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + 100x(s) = 0$
6.	Sustituyendo los valores de las condiciones iniciales por los valores conocidos.	$s^2x(s) - s(-\frac{2}{3}) - 5 + 100x(s) = 0$
7.	Se procede a operar y factorizar con el objetivo de despejar x(s)	$s^2x(s) + \frac{2}{3}s - 5 + 100x(s) = 0$ $s^2x(s) + 100x(s) = 5 - \frac{2}{3}s$

		$$x(s)(s^2+100) = 5 - \frac{2}{3}s$$ $$x(s) = \frac{5 - \frac{2}{3}s}{s^2+100}$$
8.	Separando la fracción por módulos y multiplicando la primera fracción por 10/10 para obtener una expresión a aplicar la transformada inversa de Laplace.	$$x(s) = \frac{5 - \frac{2}{3}s}{s^2+100}$$ $$x(s) = 5\frac{1}{s^2+100} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+100}$$ $$x(s) = \frac{5}{10}\frac{10}{s^2+100} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2+100}$$ $$x(s) = \frac{5}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+100}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+100}\right\}$$
9.	Evaluando la transformada inversa.	$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(10t) - \frac{2}{3}\cos(10t)$$

RESPUESTA	$$x(t) = \frac{1}{2}\sin(10t) - \frac{2}{3}\cos(10t)$$

TEMA 4: (20 puntos):
A) Usando valores y vectores propios, obtenga la solución general del sistema en la forma:

$$X(t) = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$\frac{dx}{dt} = x - 8y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 3y$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	En primer lugar planteamos la matriz con los coeficientes obtenidos de las ecuaciones	$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X$$

	diferenciales.	
2.	Obteniendo el determinante de la matriz	$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0$
3.	Realizando el procedimiento para calcular el determinante se multiplica de forma cruzada los coeficientes y si restan.	$(1-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(-8) = 0$
4.	Se obtiene una ecuación cuadrática la cual se utiliza para obtener los valores de λ	$-3 + 2\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$ $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
5.	Utilizando la ecuación de Vietta para hallar las raíces de una ecuación cuadrática es posible encontrar los valores de λ	$\lambda = -1 + 2i\ ;\ \lambda = -1 - 2i$
6.	En base a los valores obtenidos se plantea el sistema de ecuaciones para hallar los valores de las constantes K.	$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-(-1+2i) & -8 \\ 1 & -3-(-1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-2i & -8 \\ 1 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
7.	Obteniendo los valores para K.	$(2-2i)k_1 - 8k_2 = 0$ $k_2 = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)k_1$

		$\bar{k} = \begin{pmatrix} 1+0i \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{pmatrix}$
8.	Separando parte real e imaginaria se obtiene el valor de los vectores.	$\overline{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \overline{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$
9.	Planteando la solución general	$x = c_1x_1 + c_2x_2$ $x_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$ $x_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$

RESPUESTA	$x_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$ $x_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \sin 2t\right] e^{-t}$

B) La solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = 10x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x - 12y$$

En la forma $X(t) = C_1X_1 + C_2X_2$ es:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}$$

Los vectores X_1 y X_2 son:

i) ¿Linealmente independientes?
Sí/No (3 puntos)

ii) ¿Múltiplos entre sí?
Sí/No (2 puntos)

No.	Explicación	Operatoria
1.	En base al criterio del Wronskiano sabemos que dos vectores son linealmente independientes si el determinante de la	$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 5e^{8t} & e^{-10t} \\ 2e^{8t} & 4e^{-10t} \end{vmatrix}$

	matriz es distinto de cero.	
2.	Obteniendo el determinante de la matriz multiplicando de forma cruzada y restando.	$(5e^{8t})(4e^{-10t})$ $-(2e^{8t})(e^{-10^{t}}) = 18e^{-2t}$
3.	i) Como podemos ver el Wronskiano es distinto de cero, por lo tanto ambos vectores son linealmente independientes.	$W(x, x_2) = 18e^{-2t} \neq 0$
4.	ii) Como son linealmente independientes, quiere decir que no son múltiplos entre sí.	$x_1 \neq k\chi_2$

RESPUESTA	i) si son linealmente independientes ii)No son múltiplos entre si

TEMA 5: (20 puntos):
Obtenga una solución en serie de potencias con una serie centrada en cero $(X_0 = 0)$ para la ecuación diferencial:

$$y' = xy$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Igualamos la Ecuación Diferencial a 0	$y' - xy = 0$

2.	Proponemos una solución en forma de serie de potencias	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$
3.	Sustituimos $(X_0 = 0)$	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - 0)^n$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
4.	Derivamos la serie resultante	$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$
5.	Sustituimos en la Ecuación diferencial	$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
6.	Se opera $x\, x^n = x^{n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$
7.	Se propone que $k = n - 1, k = n + 1$ de manera que se tenga el mismo exponente para x	$k = n - 1 \qquad k = n + 1$ $n = k + 1 \qquad n = k - 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0$
8.	Se valúa $k = 0$ en el primer sumando para que ambas series inicien desde $k = 1$	$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0$
9.	Se factoriza $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$	$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+1}(k+1) - c_{k-1}] x^k = 0$
10.	Decimos que $c_1 = 0$ para poder encontrar la sucesión	$c_1 + c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} = 0$ $c_{k+1}(k+1) - c_{k-1} = 0$

		$c_{k+1} = \frac{c_{k-1}}{k+1}$
11.	Le damos valores a k *iniciando desde* 1 para encontrar la serie a partir de la sucesión	$c_{k+1} = \frac{c_{k-1}}{k+1}$ $k=1 \quad c_2 = \frac{c_0}{2}$ $k=2 \quad c_3 = \frac{c_1}{3} \quad c_1 = 0 \quad c_3 = 0$ $k=3 \quad c_4 = \frac{c_2}{4} \quad c_2 = \frac{c_0}{2} \quad c_4 = \frac{c_0}{8}$ $k=4 \quad c_5 = \frac{c_3}{5} \quad c_3 = 0 \quad c_5 = 0$ $k=5 \quad c_6 = \frac{c_4}{6} \quad c_4 = \frac{c_0}{8} \quad c_6 = \frac{c_0}{48}$ $k=6 \quad c_7 = \frac{c_5}{7} \quad c_5 = 0 \quad c_7 = 0$ $k=7 \quad c_8 = \frac{c_6}{8} \quad c_6 = \frac{c_0}{48} \quad c_8 = \frac{c_0}{384}$

12.	Por lo tanto la serie queda de	$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8$ $c_1 = 0$ $c_2 = \frac{c_0}{2}$ $c_3 = 0$ $c_4 = \frac{c_0}{8}$ $c_5 = 0$ $c_6 = \frac{c_0}{48}$ $c_7 = 0$ $c_8 = \frac{c_0}{384}$ Sustituyendo $\sum_{n=1}^{\infty} = c_0 + 0x + \frac{c_0}{2} x^2 + 0x^3 + \frac{c_0}{8} x^4 + 0x^5 + \frac{c_0}{48} x^6 + 0\,x^7 + \frac{c_0}{384} x^8 + \ldots.$
13.	Se Factoriza c_0	$c_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{48} x^6 + \frac{1}{384} x^8 + \cdots \right]$ $c_0[1 + \frac{1}{2^{(1)}\,(1)!} x^{2(1)} + \frac{1}{2^{(2)}\,(2)!} x^{2(2)} + \frac{1}{2^{(3)}\,(3)!} x^{2(3)} + \frac{1}{2^{(4)}\,(4)!} x^{2(4)} + \cdots]$
14.	Por lo tanto, la función queda	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^{2n}}{2^n\, n!}$

RESPUESTA	$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{x^{2n}}{2^n\, n!}$