UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
clave-123-4-V-2-00-2019

CURSO:	Matemática Aplicada 5
SEMESTRE:	Segundo
CÓDIGO DEL CURSO:	123
TIPO DE EXAMEN:	Examen Final
FECHA DE EXAMEN:	20 de noviembre de 2019
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	Erick Roberto Mendoza Arevalo
COORDINADOR:	Ing. José Alfredo González

Prueba Final

MA5N FIUSAC 2019-Nov-20 Temario A

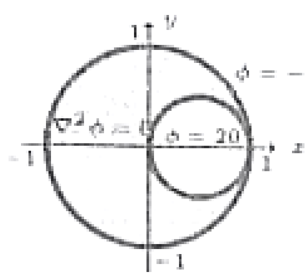
Nota: Todos sus procedimientos debe ejecutarlos en papel y lápiz. Puede usar software solo para verificar su respuesta. Respuestas sin procedimiento en su cuaderno de examen no tienen valor.

Tema 1 (20 puntos)

1. Usando álgebra y dibujos, mapee la semirrecta $y = 1, x \geq 0$ bajo la función $f(z) = \frac{i}{z} + 1$.
2. Determine todos los valores complejos de z que se mapean en $w = 0$ bajo la función $w = f(z) = e^z + 2e^{-z} - 2$

Tema 2 (20 puntos)

1. En el interior del cable cilíndrico no coaxial con los potenciales indicados,



La función del potencial compleja está dado por,

$$\Omega(x, y) = -30(1 + i)\left(\frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1 - y - x}{(x-1)^2 + y^2}i\right) - 10$$

a) Determine la parte real de Ω, la cual representa la función potencial electrostática ϕ en el interior del cable y,
b) Grafique la equipotencial $\phi = 0$ (Debe completar cuadrados).

2. Compruebe que la función $u(x, y) = xy + x + 2y - 5$ es armónica en el plano complejo. Determine su armónica conjugado $v(x, y)$ y construya la función analítica $f(z) = u + iv$ tal que $f(2i) = -1 + 5i$.

Tema 3 (20 puntos)

El potencial de velocidad complejo de un fluido ideal está dado por

$$\Omega(z) = Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

1. Calcule la parte real e imaginaria del potencial complejo en el punto $z = i$.
2. Calcule $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$, llamado velocidad compleja y valor en $z = i$.

Tema 4 (40 puntos)

Utilice los resultados y procedimientos apropiados discutidos en clase para evaluar las integrales. Debe dejar indicado los teoremas, reglas o procedimientos que usa, y graficar el contorno indicado.

a) $$\int e^{\omega t}\sin(\omega t)\,dt$$

c) $$\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-i\omega t}dt$$

b) $$\int_C (z^2+i)dz$$
$$C: y = x^2+1, 0 \le x \le 1$$

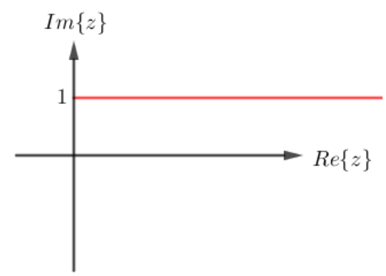
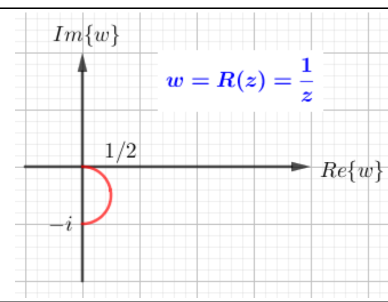
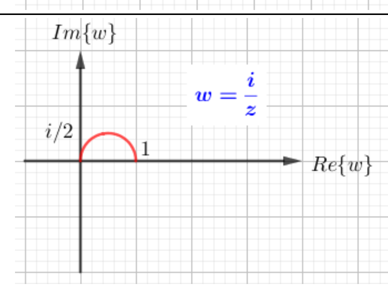
d) $$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^2}dz$$

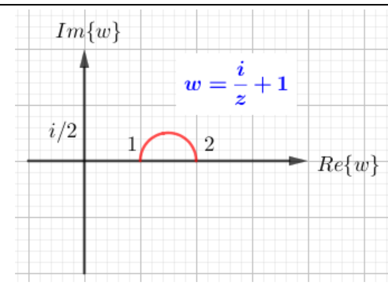
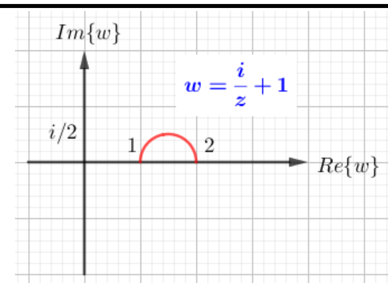
Solución

Tema 1

Usando álgebra y dibujos, mapee la semirrecta $y = 1, x \geq 0$ bajo la función

$$f(z) = \frac{i}{z} + 1$$

<table>
<tr><th>No.</th><th>Descripción</th><th>Procedimiento</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Consideramos $f(z)$ como la composición de un mapeo lineal y un mapeo recíproco.</td><td>Mapeo Recíproco
$$R(z) = \frac{1}{z}$$
Mapeo Lineal
$$L(z) = iz + 1$$
Composición de mapeos
$$f(z) = L \circ R(z)$$
$$f(z) = L(\ R(z)\ )$$
$$f(z) = i\left(\frac{1}{z}\right) + 1$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Graficamos el conjunto de entrada.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Aplicamos el mapeo $R(z)$, por lo que la semirrecta se convertirá en una semicircunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y centro en $-i/2$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Luego procedemos con el mapeo lineal, aplicando una rotación sobre el conjunto anterior de $Arg(i) = \frac{\pi}{2}$.</td><td>
</td></tr>
</table>

5	Por último, procedemos a la traslación del mapeo lineal de 1 unidad.	
	RESPUESTA	

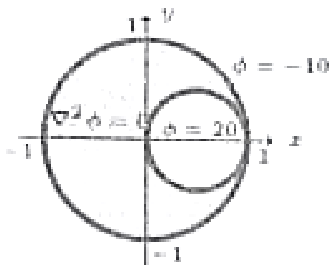
Determine todos los valores complejos de z que se mapean en $w = 0$ bajo la función $w = f(z) = e^z + 2e^{-z} - 2$

No.	Descripción	Procedimiento
1	Dado que debemos encontrar todos los valores que cumplen con esas condiciones, escribimos la ecuación a resolver.	$e^z + 2e^{-z} - 2 = 0$
2	Tomamos la sustitución $u = e^z$ y simplificamos la expresión.	$u + 2u^{-1} - 2 = 0$ $u + \frac{2}{u} - 2 = 0$ $\frac{u^2 + 2 - 2u}{u} = 0$
3	Resolvemos la ecuación cuadrática en el denominador utilizando fórmula cuadrática y recordando que $i = \sqrt{-1}$.	$u^2 - 2u + 2 = 0$ $u = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ $u = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$ $u = \frac{2 \pm 2i}{2}$ $u = 1 \pm i$
4	Volvemos a la sustitución y resolvemos la ecuación exponencial resultante, tomando en cuenta que $Ln(z) = Ln\lvert z\rvert + i\,Arg(z)$	<u>CASO 1: $u = 1 + i$</u> $e^z = 1 + i$ $z = Ln(1 + i)$ $z = Ln\lvert 1 + i\rvert + i\,Arg(1 + i)$ $\boldsymbol{z = Ln\sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}}$

		CASO 2: $u = 1 - i$ $e^z = 1 - i$ $z = Ln(1 - i)$ $z = Ln\lvert 1 - i\rvert + i\,Arg(1 - i)$ $\boldsymbol{z = Ln\,\sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}$
	RESPUESTA	$\boldsymbol{z = Ln\,\sqrt{2} \pm \frac{i\pi}{4}}$

Tema 2

En el interior del cable cilíndrico no coaxial con los potenciales indicados,

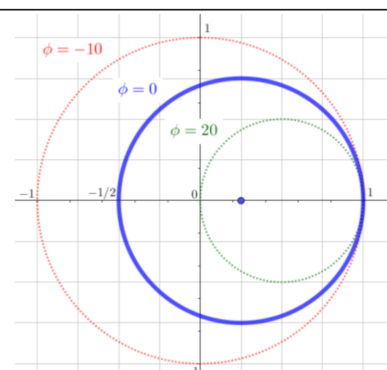


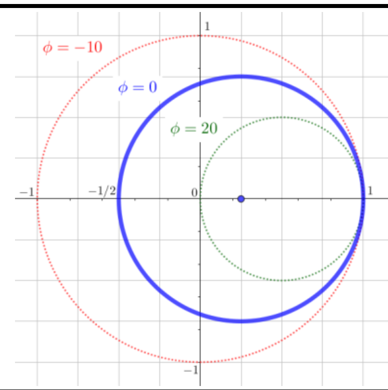
La función del potencial compleja está dado por,

$$\Omega(x, y) = -30(1 + i)\left(\frac{x^2 + y^2 - x - y}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{1 - y - x}{(x - 1)^2 + y^2}i\right) - 10$$

a) Determine la parte real de Ω, la cual representa la función potencial electrostática ϕ en el interior del cable y,
b) Grafique la equipotencial $\phi = 0$ (Debe completar cuadrados).

No.	Descripción	Procedimiento
1	Empezaremos por realizar las siguientes sustituciones para simplificar el álgebra.	$A = x^2 + y^2 - x - y$ $B = 1 - y - x$ $C = (x - 1)^2 + y^2$ $\Omega = -30(1 + i)\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}i\right) - 10$
2	Expandimos la función Ω.	$\Omega = -\frac{30}{C}(1 + i)(A + Bi) - 10$ $\Omega = -\frac{30}{C}(A + Bi + Ai + Bi^2) - 10$ $\Omega = -\frac{30}{C}(A + (A + B)i - B) - 10$

		$\Omega = -\frac{30}{C}[(A-B)+(A+B)i]-10$ $\Omega = \left(-\frac{30}{C}(A-B)-10\right)+\left(-\frac{30}{C}(A+B)\right)i$
3	Trabajaremos ahora con la parte real de $\Omega(x,y)$ y regresando las sustituciones realizadas previamente.	$A-B=(x^2+y^2-y-x)-(1-y-x)$ $A-B=x^2+y^2-1$ $\phi = Re[\Omega] = -\frac{30}{C}(A-B)-10$ $\boldsymbol{\phi(x,y) = -\frac{30(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2}-10}$
4	Ahora graficamos el potencial $\Omega = 0$, por lo que manipulamos algebraicamente la expresión y completamos cuadrados.	$0 = -\frac{30(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2}-10$ $3(x^2+y^2-1) = -(x-1)^2-y^2$ $3x^2+3y^2-3 = -x^2+2x-1-y^2$ $4x^2-2x+4y^2=2$ $x^2-\frac{1}{2}x+y^2=\frac{1}{2}$ $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+y^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$
5	La expresión resultante corresponde a la ecuación de una circunferencia con centro en $\left(\frac{1}{4},0\right)$ y radio ¾, la cual hemos representado en color azul.	
	RESPUESTA	$\boldsymbol{\phi(x,y) = -\frac{30(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2}-10}$

Compruebe que la función $u(x, y) = xy + x + 2y - 5$ es armónica en el plano complejo. Determine su armónica conjugado $v(x, y)$ y construya la función analítica $f(z) = u + iv$ tal que $f(2i) = -1 + 5i$.

No.	Descripción	Procedimiento
1	Para que una función sea armónica, debe cumplir con la ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Por lo que determinamos sus derivadas parciales y comprobamos en la ecuación.	$u = xy + x + 2y - 5$ $u_x = y + 1$ $u_{xx} = 0$ $u_y = x + 2$ $u_{yy} = 0$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $0 + 0 = 0$ SI ES UNA FUNCIÓN ARMÓNICA EN EL PLANO COMPLEJO.
2	Ya que la función armónica conjugada cumple con que la función $f(z)$ sea analítica, entonces debe satisfacer a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.	$v_y = u_x$ $v_y = y + 1$ (Ec. 1) $u_y = -v_x$ $x + 2 = -v_x$ (Ec. 2)
3	Utilizando la Ecuación 1 del inciso anterior, procedemos a integrar respecto a la variable y. Debemos recordar que al integrar se origina la función $g(x)$.	$\int v_y \, dy = \int (y + 1) dy$ $v(x, y) = \frac{y^2}{2} + y + g(x)$
4	Derivamos $v(x, y)$ respecto de x e introducimos en la Ecuación 2.	$v_x = g'(x)$ $x + 2 = -g'(x)$

5	Resolvemos la ecuación diferencial anterior por el método de variables separables.	$$\frac{dg}{dx} = -x - 2$$ $$\int dg = \int (-x-2)dx$$ $$g(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + C$$
6	Introducimos $g(x)$ en $v(x, y)$.	$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} - 2x + C$$
7	Procedemos a determinar el valor de C, para ello en la función analítica evaluamos la condición $f(2i) = -1 + 5i$.	$$f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$ $$f(x,y) = (xy + x + 2y - 5) + i\left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} - 2x + C\right)$$ $$f(0,2) = (0 + 0 + 2 \cdot 2 - 5) + i\left(\frac{(2)^2}{2} + 2 - 0 - 0 + C\right)$$ $$f(0,2) = -1 + i(4 + C)$$ $$-1 + 5i = -1 + i(4 + C)$$ $$5 = 4 + C \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{C = 1}$$
	RESPUESTA	$$\boldsymbol{v(x,y) = \frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} - 2x + 1}$$ $$\boldsymbol{f(x,y) = (xy + x + 2y - 5) + i\left(\frac{y^2}{2} + y - \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)}$$

Tema 3

El potencial de velocidad complejo de un fluido ideal está dado por

$$\Omega(z) = Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

1. Calcule la parte real e imaginaria del potencial complejo en el punto $z = i$.

No.	Descripción	Procedimiento
1	Simplificamos $\Omega(z)$ y evaluamos $\Omega(i)$.	$$\Omega(z) = Ln(z+1) - Ln(z-1)$$ $$\Omega(i) = Ln(i+1) - Ln(i-1)$$
2	Simplificamos tomando en cuenta que $$Ln(z) = Ln\,\lvert z\rvert + i\,Arg(z)$$	$$\Omega(i) = Ln\lvert i+1\rvert + iArg(i+1) - Ln\lvert i-1\rvert - iArg(i-1)$$

		$\Omega(i) = Ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right) - Ln\sqrt{2} - i\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\Omega(i) = i\pi/2$
	RESPUESTA	$\boldsymbol{Re\{\,\Omega(i)\,\} = 0}$ $\boldsymbol{Im\{\,\Omega(i)\,\} = \pi/2}$

2. Calcule $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$, llamado velocidad compleja y valor en $z = i$.

No.	Descripción	Procedimiento
1	Obtenemos $\Omega'(z)$ y simplificamos.	$\Omega(z) = Ln(z+1) - Ln(z-1)$ $\Omega'(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}$ $\Omega'(z) = \frac{z-1-z-1}{z^2-1}$ $\Omega'(z) = \frac{-2}{z^2-1}$
2	Aplicamos el conjugado a la expresión anterior y aplicamos propiedades del conjugado.	$\overline{\Omega'(z)} = \overline{\left(\frac{-2}{z^2-1}\right)}$ $\overline{\Omega'(z)} = \frac{\overline{-2}}{\overline{z^2-1}}$ $\overline{\Omega'(z)} = \frac{-2}{\overline{z^2}-1}$ $\overline{\Omega'(z)} = \frac{-2}{\bar{z}^2-1}$
3	Evaluamos $\overline{\Omega'(i)}$	$\overline{\Omega'(i)} = \frac{-2}{\bar{i}^2-1}$ $\overline{\Omega'(i)} = \frac{-2}{(-i)^2-1}$ $\overline{\Omega'(i)} = \frac{-2}{-1-1} = 1$

	RESPUESTA	$\overline{\boldsymbol{\Omega}'(\boldsymbol{z})} = \dfrac{\mathbf{-2}}{\bar{\boldsymbol{z}}^{2} - \mathbf{1}}$ $\overline{\boldsymbol{\Omega}'(\boldsymbol{\imath})} = \mathbf{1}$

Tema 4

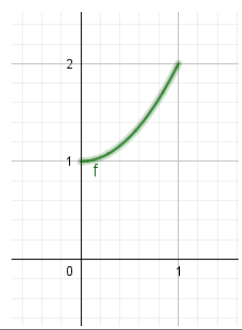
Utilice los resultados y procedimientos apropiados discutidos en clase para evaluar las integrales. Debe dejar indicado los teoremas, reglas o procedimientos que usa, y graficar el contorno indicado.

$$\int e^{\omega t}\sin(\omega t)\,dt$$

No.	Descripción	Procedimiento
1	Para simplificar, expresamos $\sin(\omega t)$ en términos de la exponencial compleja. $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$	$\int e^{\omega t}\sin(\omega t)\,dt$ $\int e^{\omega t}\left(\dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)dt$
2	Simplificamos el integrando algebraicamente.	$\int \left(\dfrac{e^{\omega t}e^{i\omega t} - e^{\omega t}e^{-i\omega t}}{2i}\right)dt$ $\int \left(\dfrac{e^{(1+i)\omega t} - e^{(1-i)\omega t}}{2i}\right)dt$ $\dfrac{1}{2i}\left(\int e^{(1+i)\omega t}dt - \int e^{(1-i)\omega t}dt\right)$
3	Evaluamos cada integral y simplificamos algebraicamente.	$\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{e^{(1+i)\omega t}}{(1+i)\omega} - \dfrac{e^{(1-i)\omega t}}{(1-i)\omega}\right) + \mathbb{C}$ $\dfrac{1}{2i\omega}\left(\dfrac{e^{(1+i)\omega t}}{(1+i)} - \dfrac{e^{(1-i)\omega t}}{(1-i)}\right) + \mathbb{C}$ $\dfrac{1}{2i\omega}\left(\dfrac{(1-i)e^{(1+i)\omega t} - (1+i)e^{(1-i)\omega t}}{1^2 - i^2}\right) + \mathbb{C}$ $\dfrac{e^{\omega t}}{2i\omega}\left(\dfrac{(1-i)e^{i\omega t} - (1+i)e^{-i\omega t}}{2}\right) + \mathbb{C}$ $\dfrac{e^{\omega t}}{2i\omega}\left(\dfrac{e^{i\omega t} - ie^{i\omega t} - e^{-i\omega t} - ie^{-i\omega t}}{2}\right) + \mathbb{C}$

		$\frac{e^{\omega t}}{2i\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}-i\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)+\mathbb{C}$ $\frac{e^{\omega t}}{2\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}-\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)+\mathbb{C}$ $\frac{e^{\omega t}}{2\omega}(\sin\omega t-\cos\omega t)+\mathbb{C}$
	RESPUESTA	$\boldsymbol{\int e^{\omega t}\sin(\omega t)\,dt=\frac{e^{\omega t}}{2\omega}(\sin\omega t-\cos\omega t)+\mathbb{C}}$

$$\int_C (z^2+i)dz$$
$$C: y = x^2+1, 0 \le x \le 1$$

No.	Descripción	Procedimiento
1	Utilizamos el **Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Contorno**, dado que el integrando es una función analítica, posee antiderivada y es continua en todo el plano complejo. Empezamos por definir z_0 (punto inicial de la trayectoria) y z_1 (punto final de la trayectoria), así como graficar la trayectoria de C.	$z_0 = x_0 + iy_0$ $z_0 = x_0 + i(x_0^2+1)$ $z_0 = 0 + i(0^2+1)$ $z_0 = i$ $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_1 = x_1 + i(x_1^2+1)$ $z_1 = 1 + i(1^2+1)$ $z_1 = 1+2i$ 
2	Encontramos la antiderivada de $f(z)$.	$f(z) = z^2 + i$ $F(z) = \int (z^2+i)dz = \frac{z^3}{3} + iz + C$
3	Aplicamos el **Teorema Fundamental del Cálculo para Integrales de Contorno**, y simplificamos el resultado utilizando calculadora.	$\int_C (z^2+i)dz = F(z_1) - F(z_0)$ $= \left(\frac{z^3}{3}+iz\right)_i^{1+2i}$

		$= \frac{(1+2i)^3}{3} + i(1+2i) - \frac{i^3}{3} - i(i)$ $= \frac{-14+2i}{3}$
	RESPUESTA	$\boldsymbol{\int_C (z^2+i)dz = \frac{-14+2i}{3}}$

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^2} dz$$

No.	Descripción	Procedimiento
1	Aplicamos la parametrización del contorno.	$z = 1 + e^{i\,t}$ $0 \le t \le 2\pi$
2	Resolvemos la integral por parametrización	$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt$ $\int_{\|z-1\|=1} \frac{1}{(z-1)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+e^{it}-1)^2}\left(i\,e^{it}\right)dt$ $\int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{it}}{e^{2it}} dt$ $i\int_0^{2\pi} e^{-it}dt$
3	Utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo	$i\int_0^{2\pi} e^{-it}dt = \left(\frac{ie^{it}}{-i}\right)_0^{2\pi} = -e^{2\pi i} + e^0$ $= -1 + 1 = 0$
	RESPUESTA	$\boldsymbol{\int_{\|z-1\|=1} \frac{1}{(z-1)^2} dz = 0}$